

Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières

Michał Zydor *

Abstract

We establish the coarse relative trace formulae of Jacquet-Rallis for linear and unitary groups. Both formulae are of the form: a sum of spectral distributions equals a sum of geometric distributions. In order to obtain the spectral decompositions we introduce new truncation operators and we investigate their properties. On the geometric side, by means of the Cayley transform, the decompositions are derived from a procedure of descent to the tangent spaces for which the formulae are known thanks to our previous work.

Résumé

On établit les formules des traces relatives de Jacques-Rallis grossières pour les groupes linéaires et unitaires. Les deux formules sont sous la forme suivante : une somme des distributions spectrales est égale à une somme des distributions géométriques. Pour établir les développements spectraux on introduit de nouveaux opérateurs de troncature et on étudie leur propriétés. Du côté géométrique, en utilisant les applications de Cayley, les développements s'obtiennent par un argument de descente vers les espaces tangents pour lesquels les formules sont connues grâce à nos travaux précédents.

Introduction

0.1 Le contexte

La motivation de ce travail est l'article [JR11] de Jacquet et Rallis qui propose une approche à la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad (GGP) pour le produit de groupes unitaires $U(n) \times U(n+1)$ via une formule des traces relative. Dans cet article on présente les versions grossières de ces formules, c'est-à-dire une identité entre une somme des distributions spectrales indexée par les données cuspidales et une somme des distributions géométriques suivant les éléments d'un quotient catégorique.

Décrivons d'abord brièvement la conjecture GGP. Soit E/F une extension quadratique de corps de nombres et soit σ le générateur du groupe de Galois de cette extension. Soit W un F -espace vectoriel de dimension finie $n+1$ muni d'une décomposition en somme directe $W = V \oplus D$ avec V de dimension n et D de dimension 1, où $n \in \mathbb{N}$. On note $G = \mathrm{GL}(V)$ que l'on voit comme un sous-groupe de $\tilde{G} := \mathrm{GL}(W)$ qui agit trivialement sur D . On note $G_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}(V_E)$ et $\tilde{G}_E := \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}(W_E)$ où $V_E = V \otimes_F E$ etc. On a donc des inclusions naturelles $G \hookrightarrow G_E \hookrightarrow \tilde{G}_E \hookrightarrow \tilde{G}$. On suppose que W_E est muni d'une forme σ -hermitienne non-dégénérée $\tilde{\Phi}$ de façon que V_E soit orthogonal à D_E . On note $U = U(V_E, \tilde{\Phi}|_{V_E})$ le groupe unitaire associé qu'on voit comme un sous-groupe de $\tilde{U} := U(W_E, \tilde{\Phi})$ qui agit trivialement sur D_E . Le groupe \tilde{U} est aussi naturellement un sous-groupe de \tilde{G}_E .

Soit \mathbb{A} l'anneau des adèles de F . Pour un F -groupe algébrique H quelconque on note $[H] = H(F) \backslash H(\mathbb{A})$. Pour une représentation automorphe cuspidale π de $U \times \tilde{U}$ définissons $\mathcal{P}_{U,\pi} : \pi \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\pi \ni \phi \mapsto \int_{[U]} \phi(x, x) dx.$$

*Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science P.O. Box 26, Rehovot 76100, Israel. mail : michalz@weizmann.ac.il

On appelle $\mathcal{P}_{U,\pi}$ une période. La conjecture GGP prédit alors, en gros, que la valeur centrale $L(\Pi, 1/2)$ de la fonction L du changement de base Π de π à $G_E \times \tilde{G}_E$ est non-nulle si et seulement si la période $\mathcal{P}_{U,\pi}$, quitte à changer $(U \times \tilde{U}, \pi)$ par un autre membre du L -paquet de Vogan, est non-triviale. On renvoie à [GGP12] pour les énoncés précis. De plus, Ichino et Ikeda [II10] ont formulé un raffinement de la conjecture GGP dans le cas des groupes orthogonaux et le cas des groupes unitaires discuté ici a été traité par N. Harris [Har14]. Ce raffinement exprime la valeur $L(\Pi, 1/2)$ en fonction de la période $\mathcal{P}_{U,\pi}$.

On décrit maintenant l'approche de Jacquet et Rallis [JR11] à la conjecture GGP pour les groupes unitaires. Soient $F_U \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et $F_G \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ des fonctions lisses à support compact. Soient k_{F_U} et k_{F_G} leur noyaux automorphes. Jacquet et Rallis proposent d'étudier les intégrales suivantes :

$$J(F_U) := \int_{[U]} \int_{[U]} k_{F_U}(x, x, y, y) dx dy, \quad I(F_G) := \int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} k_{F_G}(g, g, h, \tilde{h}) \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg,$$

où $\eta(h, \tilde{h}) = \eta_{E/F}(\det h)^{n+1} \eta_{E/F}(\det \tilde{h})^n$ et $\eta_{E/F}$ c'est le caractère quadratique sur le groupe des idèles de \mathbb{A} associé à l'extension E/F par la théorie du corps de classes. On note aussitôt que les intégrales ci-dessus ne sont pas en général convergentes. Pourtant, si F_U et F_G vérifient certaines conditions locales supplémentaires les intégrales convergent et elles ont des développements spectraux, avec des contributions des représentations cuspidales seulement, du type $J(F_U) = \sum_{\pi} J_{\pi}(F_U)$ et $I(F_G) = \sum_{\Pi} I_{\Pi}(F_G)$ où les sommes portent sur les représentations automorphes cuspidales de $U \times \tilde{U}$ et $G_E \times \tilde{G}_E$ respectivement. De plus, la distribution J_{π} est non-nulle si et seulement si $\mathcal{P}_{U,\pi} \neq 0$. De l'autre côté la distribution I_{Π} est liée à la période de Jacquet, Piatetski-Schapiro et Shalika [JPSS83] et si elle est non-nulle on a $L(\Pi, 1/2) \neq 0$. De surcroît, I_{Π} fait intervenir les périodes de Flicker-Rallis [Fli91], qui permettent (au moins conjecturalement) de sélectionner seulement les représentations Π qui proviennent par changement de base d'un produit des groupes unitaires $U' \times \tilde{U}'$ comme ci-dessus.

Pour décrire les décompositions géométriques de $I(F_G)$ et $J(F_U)$ notons qu'on a des isomorphismes de quotients suivants :

$$\Delta U \backslash U \times \tilde{U} / \Delta U \cong \tilde{U} // U, \quad (x, \tilde{x}) \mapsto x^{-1} \tilde{x}, \quad \Delta G_E \backslash G_E \times \tilde{G}_E / G \times \tilde{G} \cong S_W // G, \quad (g, \tilde{g}) \mapsto \bar{g}^{-1} \tilde{g} \bar{g}^{-1} g$$

où ΔU (resp. ΔG_E) est l'image de U (resp. de G_E) par l'inclusion diagonale $U \hookrightarrow U \times \tilde{U}$ (resp. $G_E \hookrightarrow G_E \times \tilde{G}_E$), $S_W \subseteq \tilde{G}_E$ est la F -variété des $y \in \tilde{G}_E$ tels que $y\sigma(y) = 1$, U agit par conjugaison sur \tilde{U} et G agit sur S_W par restriction de son action adjointe à \tilde{G}_E .

En utilisant les isomorphismes des quotients ci-dessus on associe à F_U une fonction $\Phi_U \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ et à F_G une fonction $\Phi_G \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ de sorte qu'on a formellement :

$$J(F_U) = \int_{[U]} k_{\Phi_U}(x) dx, \quad I(F_G) = \int_{[G]} k_{\Phi_G}(h) \eta_{E/F}(\det h) dh \quad (0.1)$$

où $k_{\Phi_U}(x) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{U}(F)} \Phi(x^{-1} \tilde{\gamma} x)$ pour $x \in U(\mathbb{A})$ et $k_{\Phi_G}(h) = \sum_{\gamma \in S_W(F)} \Phi_G(h \gamma h)$ pour $h \in G(\mathbb{A})$.

De nouveau, les intégrales ci-dessus ne convergent pas en général, mais sous certaines conditions locales elles admettent des décompositions en somme d'intégrales orbitales relatives indexée par les orbites dites *semi-simples régulières* (qui sont fermées de centralisateurs triviaux). On peut comparer ces intégrales orbitales par un transfert des fonctions dual de transfert de classes de conjugaison semi-simples régulières ce qui mène aux identités entre les distributions spectrales sur les deux groupes et permet de déduire la conjecture GGP. Cette stratégie a été utilisée par Wei Zhang [Zha14b]. Zhang démontre une partie substantielle de la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires. L'un des ingrédients importants dans sa preuve est le lemme fondamental de Jacquet-Rallis démontré par Yun [Yun11]. Notons aussi que Zhang [Zha14a], en utilisant toujours les formules des traces décrites ci-dessus, démontre certains cas

du raffinement de la conjecture GGP qui précise la valeur centrale $L(\Pi, 1/2)$ du à Ichino-Ikeda [II10] et N. Harris [Har14].

Afin d'étendre les résultats de Zhang, il faut des formules des traces valables pour toutes les fonctions lisses à support compact. En général, du côté spectral il y a d'autres contributions que celles provenant des représentations cuspidales et du côté géométrique il y a des contributions des orbites qui ne sont pas semi-simples régulières. Ce sont ces contributions qui rendent les intégrales définissant $J(F_U)$, $I(F_G)$, $J(\Phi_U)$ et $I(\Phi_G)$ divergentes en général. Dans cet article on donne des formules des traces pour les groupes unitaires et linéaires valables pour toutes les fonctions lisses à support compact qui prennent en compte toutes les contributions des côtés spectraux et géométriques.

0.2 Nos résultats

Notre approche de fait est par un processus de troncature à la Arthur. Soient χ' une donnée cuspidale de $G_E \times \tilde{G}_E$ et χ une donnée cuspidale de $U \times \tilde{U}$. On a alors les χ' et χ -parties des noyaux k_{F_G} et k_{F_U} notées respectivement $k_{F_G, \chi'}$ et $k_{F_U, \chi}$ (voir les paragraphes 1.6 et 1.7). Au début de la section 3 on définit le noyau modifié $k_{F_G, \chi'}^{T'}$ où T' est un paramètre de troncature qui appartient à un cône aigu, noté \mathfrak{a}_0^+ (voir le paragraphe 1.1), engendré par les copoids associés à un sous-groupe parabolique minimal de \tilde{G}_E . De même, au début de la section 4 on définit le noyau modifié $k_{F_U, \chi}^T$ où $T \in \mathfrak{a}_0^+$. Nos résultats du côté spectral sont alors :

Théorème 0.1. (cf. théorèmes 3.1 et 4.1). *Pour tous $T' \in \mathfrak{a}_0^+$ et $T \in \mathfrak{a}_0^+$ assez réguliers ainsi que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\sum_{\chi'} \int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} |k_{F_G, \chi'}^{T'}(g, g, h, \tilde{h})| |N_{E/F} \det g|_{\mathbb{A}}^{\sigma} d\tilde{h} dh dg < \infty, \quad \sum_{\chi} \int_{[U]} \int_{[U]} |k_{F_U, \chi}^T(x, x, y, y)| dx dy < \infty,$$

où $N_{E/F} : (\mathbb{A} \otimes_F E)^* \rightarrow \mathbb{A}^*$ c'est la norme, \det c'est le déterminant et $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ c'est la valeur absolue standard sur les idèles de \mathbb{A} .

(cf. théorèmes 3.8 et 4.7). Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Les intégrales

$$\int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} k_{F_G, \chi'}^{T'}(g, g, h, \tilde{h}) |N_{E/F} \det g|_{\mathbb{A}}^s \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg, \quad \int_{[U]} \int_{[U]} k_{F_U, \chi}^T(x, x, y, y) dx dy$$

sont des polynômes-exponentielles en leur paramètre de troncature dont les termes purement polynomiaux sont constants, notés ensuite $I_{\chi'}(s, F_G)$ et $J_{\chi}(F_U)$ respectivement.

(cf. théorèmes 3.10 et 4.9). La distribution $I_{\chi'}(s, \cdot)$ est $|N_{E/F} \det \cdot|_{\mathbb{A}}^s$ -équivariante pour l'action de $G_E(\mathbb{A})$ à gauche et $\eta(\cdot, \cdot)$ -équivariante pour l'action de $G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A})$ à droite et $J_{\chi}(\cdot)$ est invariante pour les actions de $U(\mathbb{A})$ à gauche et à droite.

Disons quelques mots sur la preuve de la convergence. Dans la section 2 on introduit certains opérateurs de troncature et on étudie leur propriétés. Ils jouent le rôle crucial dans les preuves des théorèmes 3.1 et 4.1. Plus précisément, l'un des opérateurs qu'on utilise c'est l'opérateur de Jacquet-Lapid-Rogawski [JLR99] qui tronque les fonctions définies sur $G_E(\mathbb{A})$. Dans le paragraphe 2.3 on introduit une modification de leur opérateur qui prend en compte le centre de G_E . Finalement, dans le paragraphe 2.4 on introduit des opérateurs qui tronquent les fonctions sur $(G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A})$ et $(U \times \tilde{U})(\mathbb{A})$. Leur construction est similaire à celle des opérateurs considérés par Ichino et Yamana [IYa, IYb].

Décrivons maintenant les côtés géométriques. On définit \mathcal{O} l'ensemble de classes d'équivalence sur $\tilde{G}_E(F)$ pour la relation d'équivalence définie à partir des invariants géométriques pour l'action

par conjugaison de $G_E(F)$ sur $\tilde{G}_E(F)$ (voir le paragraphe 5.1). En particulier, toute orbite semi-simple régulière définit une unique classe dans \mathcal{O} et on obtient des décompositions des ensembles $\tilde{U}(F)$ et $S_W(F)$. Soient $\Phi_G \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ et $\Phi_U \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$. Pour $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ on pose $k_{\Phi_G, \mathfrak{o}}(x) = \sum_{\gamma \in S_W(F) \cap \mathfrak{o}} \Phi_G(x^{-1}\gamma x)$ et $k_{\Phi_U, \mathfrak{o}}(x) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{U}(F) \cap \mathfrak{o}} \Phi_U(x^{-1}\tilde{\gamma} x)$. Les intégrales (0.1) de ces fonctions ne convergent pas en général. Comme dans le cas spectral, on définit alors les noyaux modifiés $k_{\Phi_G, \mathfrak{o}}^{T'}$ (paragraphe 5.5) et $k_{\Phi_U, \mathfrak{o}}^T$ (paragraphe 6.2) où $T' \in \mathfrak{a}_0^+$ et $T \in \mathfrak{a}_0^+$. On obtient alors :

Théorème 0.2 (cf. théorèmes 5.9 et 6.6). *1. Pour tous $T' \in \mathfrak{a}_0^+$ et $T \in \mathfrak{a}_0^+$ assez réguliers ainsi que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{[G]} |k_{\Phi_G, \mathfrak{o}}^{T'}(x)| |\det x|_{\mathbb{A}}^\sigma dx < \infty, \quad \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{[U]} |k_{\Phi_U, \mathfrak{o}}^T(x)| dx < \infty.$$

2. Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Les intégrales $\int_{[G]} k_{\Phi_G, \mathfrak{o}}^{T'}(x) |\det x|_{\mathbb{A}}^s \eta_{E/F}(\det x) dx$ et $\int_{[U]} k_{\Phi_U, \mathfrak{o}}^T(x) dx$ sont des polynômes-exponentielles en leur paramètre de troncature dont les termes purement polynomiaux sont constants, notés ensuite $I_{\mathfrak{o}}(s, \Phi_G)$ et $J_{\mathfrak{o}}(\Phi_U)$ respectivement.

3. La distribution $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ est η -équivariante pour l'action de $G(\mathbb{A})$ sur $S_W(\mathbb{A})$ et la distribution $J_{\mathfrak{o}}(\cdot)$ est invariante pour l'action de $U(\mathbb{A})$ sur $\tilde{U}(\mathbb{A})$.

En fait, dans [Zyd15b, Zyd15a] on démontre ces résultats pour les versions infinitésimales des distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ et $J_{\mathfrak{o}}(\cdot)$. Ce qu'on démontre alors dans les sections 5 et 6 c'est qu'on peut se ramener aux cas infinitésimaux. L'outil principal est ici l'application de Cayley (voir le paragraphe 5.1) qui a été introduite dans le contexte de la formule des traces relative de Jacquet-Rallis dans [Zha14b], section 3. Elle permet de passer des algèbres de Lie vers les groupes et vice-versa et elle envoie les classes $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ en classes dans \mathcal{O} . En faisant alors un argument de descente, détaillé dans le paragraphe 5.4, on réduit la preuve du théorème ci-dessus aux résultats démontrés dans [Zyd15b, Zyd15a].

Voici le résultat principal de cet article qui à ce stade est une conséquence directe des théorèmes ci-dessus.

Théorème 0.3 (Formules des traces relatives de Jacquet-Rallis).

(cf. théorème 5.10). *Soit $F_G \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ et soit $\Phi_G \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ définie par*

$$\Phi_G(y) := \int_{G_E(\mathbb{A})} \int_{\tilde{G}(\mathbb{A})} F_G(x, x\tilde{g}\tilde{h}) d\tilde{h} dx \quad y = \tilde{g}\tilde{g}^{-1} \in S_W(\mathbb{A}).$$

On a alors pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\sum_{\chi'} I_{\chi'}(s, F_G) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(s, \Phi_G).$$

(cf. théorème 6.7). *Soit $F_U \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et soit $\Phi_U \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ définie par*

$$\Phi_U(x) := \int_{U(\mathbb{A})} F_U(y, xy) dy, \quad x \in \tilde{U}(\mathbb{A}).$$

On a alors :

$$\sum_{\chi} J_{\chi}(F_U) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(\Phi_U).$$

Commentons finalement l'apparition du déterminant à la puissance complexe dans les définitions des distributions $I_\chi(s, \cdot)$ et $I_o(s, \cdot)$. On ajoute ce terme en vu de possibles applications aux dérivées des intégrales orbitales relatives de Jacquet-Rallis. Pour les classes semi-simples régulières, les dérivées des analogues locaux des distributions $I_o(s, \cdot)$ définies sur la variété S_W ont d'abord été introduites dans [Zha12] et ensuite étudiées dans [RTZ13, ZRS15] pour des fonctions test particulières. Ces travaux lient ces dérivées à des nombres d'intersection sur certains espaces de Rapoport-Zink et s'inscrivent dans le cadre de la variante arithmétique de la conjecture de Gan-Gross-Prasad. Récemment, dans [Mih15], les dérivées des analogues locaux des distributions $I_o(s, \cdot)$ (leurs versions infinitésimales étudiées dans [Zyd15a]) ont aussi été étudiées. Peut-être, que notre formule pourrait avoir un intérêt dans ces questions.

Remerciements. Je remercie mon directeur de thèse, Pierre-Henri Chaudouard, pour m'avoir introduit à ce projet de recherche et au domaine de formes automorphes. Il m'a guidé depuis mon mémoire de Master 2 et j'ai beaucoup appris pendant cette période. Je lui suis très reconnaissant pour ses conseils éclairés et la confiance qu'il m'a apporté. Ce travail a été partiellement soutenu par l'Institut Universitaire de France et son projet Ferplay ANR-13-BS01-0012.

1 Prolégomènes

1.1 Préliminaires pour la formule des traces

Soient F un corps de nombres et G un F -groupe algébrique réductif. Pour tout F -sous-groupe de Levi M de G (c'est-à-dire un facteur de Levi d'un F -sous-groupe parabolique de G) soit $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble de F -sous-groupes paraboliques de G contenant M et $\mathcal{P}(M)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(M)$ composé de sous-groupes paraboliques admettant M comme facteur de Levi. On fixe un sous-groupe de Levi minimal M_0 de G . On appelle les éléments de $\mathcal{F}(M_0)$ les sous-groupes paraboliques semi-standards de G et les éléments de $\mathcal{P}(M_0)$ les sous-groupes paraboliques minimaux. On utilisera toujours le symbole P , avec des indices éventuellement, pour noter un sous-groupe parabolique semi-standard. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ soit N_P le radical unipotent de P et M_P le facteur de Levi de P contenant M_0 . On a alors $P = M_P N_P$. On note A_P le tore central de M_P déployé sur F et maximal pour cette propriété. Pour $P_1 \in \mathcal{F}(M_0)$, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrit N_1 au lieu de N_{P_1} , M_1 au lieu de M_{P_1} etc.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. On définit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathfrak{a}_P := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_F(M_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$, isomorphe à $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_F(A_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$ grâce à l'inclusion $A_P \hookrightarrow M_P$, ainsi que son espace dual $\mathfrak{a}_P^* = \text{Hom}_F(M_P, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on pose

$$d_P = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P, \quad d_Q^P = d_Q - d_P, \quad Q \subseteq P. \quad (1.1)$$

Si $P_1 \subseteq P_2$, on a un homomorphisme injectif canonique $\mathfrak{a}_2^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_1^*$ qui donne la projection $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, dont on note $\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_{P_2}^{P_1}$ le noyau. On a aussi l'inclusion $\mathfrak{a}_2 \hookrightarrow \mathfrak{a}_1$, qui est une section de $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, grâce à la restriction des caractères de A_1 à A_2 . Il s'ensuit que si $P_1 \subseteq P_2$ alors

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^2 \oplus \mathfrak{a}_2. \quad (1.2)$$

Conformément à cette décomposition, on pose aussi $(\mathfrak{a}_1^2)^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_1^* \mid \lambda(H) = 0 \ \forall H \in \mathfrak{a}_2\}$. On aura besoin aussi de $(\mathfrak{a}_{1, \mathbb{C}}^2)^* := (\mathfrak{a}_1^2)^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et de $\mathfrak{a}_{1, \mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_1^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Si $P \subseteq Q$ sont des sous-groupes paraboliques semi-standards où P est un sous-groupe parabolique minimal on note simplement $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_P$, $\mathfrak{a}_0^Q = \mathfrak{a}_P^Q$, $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_P^*$ etc. Cela ne dépend pas du choix de P . En général donc, si $P_1 \subseteq P_2$, grâce à la décomposition (1.2) ci-dessus, on considère les espaces \mathfrak{a}_1 et \mathfrak{a}_1^2 (resp. \mathfrak{a}_1^* et $(\mathfrak{a}_1^2)^*$) comme des sous-espaces de \mathfrak{a}_0 (resp. de \mathfrak{a}_0^*). En particulier, quand on parle de la projection d'un élément de \mathfrak{a}_0 à \mathfrak{a}_1^2 (resp. de \mathfrak{a}_0^* à $(\mathfrak{a}_1^2)^*$) ce sera toujours par rapport à la somme directe $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_1^2$ (resp. $(\mathfrak{a}_0)^* = (\mathfrak{a}_0^1)^* \oplus \mathfrak{a}_2^* \oplus (\mathfrak{a}_1^2)^*$).

Notons $\Delta_P^G = \Delta_P$ l'ensemble de racines simples pour l'action de A_P sur N_P . Il y a une correspondance bijective entre les sous-groupes paraboliques P_2 contenant P_1 et les sous-ensembles

$\Delta_1^2 = \Delta_{P_1}^{P_2}$ de $\Delta_1 = \Delta_{P_1}$. En fait, Δ_1^2 est l'ensemble de racines simples pour l'action de A_1 sur $N_1 \cap M_2$ et l'on a

$$\mathfrak{a}_2 = \{H \in \mathfrak{a}_1 | \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1^2\}.$$

En plus Δ_1^2 (les restrictions de ses éléments à \mathfrak{a}_1^2) est une base de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$.

Fixons $P_1 \subseteq P_2$ et soit $B \in \mathcal{P}(M_0)$ contenu dans P_1 . On a alors l'ensemble $\Delta_B^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0 | \alpha \in \Delta_B\}$ de coracines simples associées aux racines simples Δ_0 . Soit $(\Delta_1^2)^\vee$ l'ensemble de projections d'éléments de Δ_B^\vee à \mathfrak{a}_1^2 privé de zéro. Cela ne dépend pas du choix de B . L'ensemble Δ_1^2 est en bijection canonique avec $(\Delta_1^2)^\vee$, la bijection étant : à $\alpha \in \Delta_1^2$ on associe l'unique $\alpha^\vee \in (\Delta_1^2)^\vee$ tel que $\alpha(\alpha^\vee) > 0$. Notons également $\hat{\Delta}_1^2$ et $(\hat{\Delta}_1^2)^\vee$ les bases de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$ et \mathfrak{a}_1^2 duales à $(\Delta_1^2)^\vee$ et Δ_1^2 respectivement. Si $P_2 = G$ on note simplement Δ_1, Δ_1^\vee etc. Dans ce cadre, on fixe aussi la bijection naturelle entre $\hat{\Delta}_1$ et Δ_1 qui à un poids $\varpi \in \hat{\Delta}_1$ associe l'unique racine $\alpha \in \Delta_1$ tel que si l'on note $\alpha_0 \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^1$ la racine simple qui se projette sur α , alors $\varpi(\alpha_0^\vee) = 1$.

Soient $P, P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$, on note

$$\mathfrak{a}_P^+ = \{H \in \mathfrak{a}_P | \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P\}$$

et si $P_1 \subseteq P_2$ notons $\tau_1^2, \hat{\tau}_1^2$ les fonction caractéristiques de

$$\{H \in \mathfrak{a}_0 | \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1^2\}, \quad \{H \in \mathfrak{a}_0 | \varpi(H) > 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_1^2\}$$

respectivement. On note τ_P pour τ_P^G et $\hat{\tau}_P$ pour $\hat{\tau}_P^G$.

Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et soit $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ la valeur absolue standard sur le groupe des idèles \mathbb{A}^* . Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, posons $H_P : M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_P$ défini comme

$$\langle H_P(m), \chi \rangle = \log(|\chi(m)|_{\mathbb{A}}), \quad \chi \in \text{Hom}_F(M_P, \mathbb{G}_m), \ m \in M_P(\mathbb{A}).$$

C'est un homomorphisme continu et surjectif, donc si l'on note $M_P(\mathbb{A})^1$ son noyau, on obtient la suite exacte suivante

$$1 \rightarrow M_P(\mathbb{A})^1 \rightarrow M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_P \rightarrow 0.$$

Soit A_P^∞ la composante neutre du groupe des \mathbb{R} -points du tore déployé et défini sur \mathbb{Q} maximal pour cette propriété dans le \mathbb{Q} -tore $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}} A_P$. Alors, comme $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ s'injecte dans \mathbb{A} , on a naturellement $A_P^\infty \hookrightarrow A_P(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_P(\mathbb{A})$. En plus, la restriction de H_P à A_P^∞ est un isomorphisme donc $M_P(\mathbb{A})$ est un produit direct de $M_P(\mathbb{A})^1$ et A_P^∞ . Pour $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P on pose $A_P^{Q,\infty} = A_P^\infty \cap M_Q(\mathbb{A})^1$. L'application H_P induit alors un isomorphisme entre $A_P^{Q,\infty}$ et \mathfrak{a}_P^Q .

Fixons K un sous-groupe compact maximal admissible de $G(\mathbb{A})$ par rapport à M_0 (voir le paragraphe 1 de [Art81] pour la définition). On a donc, que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P , $K \cap M_P(\mathbb{A})$ est admissible dans $M_P(\mathbb{A})$ par rapport à M_0 et on obtient aussi la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K = N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{A})K$ ce qui nous permet d'étendre H_P à $G(\mathbb{A})$ en posant $H_P(x) = H_P(m)$ où $x = nmk$ avec $m \in M_P(\mathbb{A}), n \in N_P(\mathbb{A}), k \in K$. Dans ce cas $H_P(x)$ ne dépend pas du choix de m .

On note $\Omega = \Omega^G$ le groupe de Weyl de (G, M_0) . Pour tout $s \in \Omega$, on choisit un représentant w_s de s dans $G(F)$. Pour un F -sous-groupe H de G et $s \in \Omega$ on note sH le F -sous-groupe $w_s H w_s^{-1}$. On n'utilisera cette notation que si cela ne dépend pas du choix de w_s . Le groupe Ω agit donc ainsi sur $\mathcal{F}(M_0)$. Pour tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ l'application $\Omega \ni s \mapsto sB \in \mathcal{P}(M_0)$ est une bijection et si $B' = sB$ on a $N_{B'} = sN_B$. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ soit Ω^P le sous-groupe de Ω stabilisant P . On a donc $\Omega^P = \{s \in \Omega | w_s \in M_P(F)\}$.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Suivant le paragraphe 2 de [Art81] on introduit la fonction Γ'_P , qu'on utilisera dans les sections 3 et 4, comme étant

$$\Gamma'_P(H, X) = \sum_{R \supseteq P} (-1)^{d_R^G} \hat{\tau}_R(H - X) \tau_P^R(H), \quad H, X \in \mathfrak{a}_P. \quad (1.3)$$

On a l'égalité suivante

$$\hat{\tau}_P(H - X) = \sum_{R \supseteq P} (-1)^{d_R^G} \hat{\tau}_P^R(H) \Gamma'_R(H, X), \quad H, X \in \mathfrak{a}_P. \quad (1.4)$$

Lemme 1.1 (cf. [Art81], lemme 2.1). *Pour un $X \in \mathfrak{a}_P$ fixé, la fonction $\mathfrak{a}_P^G \ni H \mapsto \Gamma_P(H, X)$ est une fonction mesurable à support compact dans \mathfrak{a}_P^G .*

Notons finalement, que parfois, pour économiser l'espace, on utilisera la notation $[H]$ et $[H]^1$ pour noter $H(\mathbb{F}) \backslash H(\mathbb{A})$ et $H(\mathbb{F}) \backslash H(\mathbb{A})^1$ respectivement.

1.2 Le domaine de Siegel

Soient $B, P \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P \supseteq B$ et $B \in \mathcal{P}(M_0)$. Pour un réel négatif c posons $A_B^\infty(P, c) = \{a \in A_B^\infty \mid \alpha(H_B(a)) > c, \forall \alpha \in \Delta_B^P\}$ et pour un compact $\omega_B \subseteq M_0(\mathbb{A})^1 N_B(\mathbb{A})$ notons

$$\mathfrak{S}_B^P(\omega, c) = \{mak \in G(\mathbb{A}) \mid m \in \omega, k \in K, a \in A_B^\infty(P, c)\}.$$

Le résultat classique de la théorie de réduction, qu'on peut trouver, par exemple dans [God64] est qu'il existe un $c_0 < 0$ et pour tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ un compact $\omega_B \subseteq M_0(\mathbb{A})^1 N_B(\mathbb{A})$ tels que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P contenant B l'on a :

$$G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{F}) \mathfrak{S}_B^P(\omega_B, c_0). \quad (1.5)$$

Fixons la constante c_0 comme ci-dessus. Pour tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ on fixe aussi un ω_B comme dans l'équation (1.5) de façon que si $B' \in \mathcal{P}(M_0)$ est tel que $sB = B'$ on a $\omega_{B'} = w_s \omega_B w_s^{-1}$. Les définitions de ce paragraphe sont valables en particulier pour les sous-groupes de Levi de G . On voit donc qu'on peut fixer un ω_B de façon que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P et tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ le contenant le compact $M_P(\mathbb{A}) \cap \omega_B$ ainsi que le sous-groupe $K_P := M_P(\mathbb{A}) \cap K$ jouissent des rôles de ω_B et K ci-dessus par rapport au groupe réductif M_P et son sous-groupe de Borel $B \cap M_P$, la constante c_0 restant la même.

Soient $B \in \mathcal{P}(M_0)$, $P \supseteq B$ et $T \in \mathfrak{a}_0$. On définit $F_B^P(x, T)$ comme la fonction caractéristique de l'ensemble :

$$\{x \in G(\mathbb{A}) \mid \exists \delta \in P(\mathbb{F}) \ \delta x \in \mathfrak{S}_B^P(\omega_B, c_0), \ \varpi(H_B(\delta x) - T) < 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_B^P\}.$$

Visiblement, la fonction $G(\mathbb{A}) \ni x \mapsto F_B^P(x, T)$ est $P(\mathbb{F})$ -invariante.

Une fois les compacts ω_B et la constante c_0 choisis, on appelle les ensembles $\mathfrak{S}_B^P(\omega_B, c_0)$ les domaines de Siegel et on les notera simplement par \mathfrak{S}_B^P .

1.3 Les mesures de Haar

Soit P un sous-groupe parabolique semi-standard de G . On fixe dx une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$, ainsi que pour tout sous-groupe connexe V de N_P (resp. toute sous-algèbre \mathfrak{h} de \mathfrak{n}_P) l'unique mesure de Haar sur $V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) pour laquelle le volume de $V(\mathbb{F}) \backslash V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{F}) \backslash \mathfrak{h}(\mathbb{A})$) soit 1. Choisissons les mesures de Haar sur K et tout ses sous-groupes fermés normalisés de même façon.

On fixe aussi une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur \mathfrak{a}_0 invariante par le groupe de Weyl Ω et sur tout sous-espace de \mathfrak{a}_0 la mesure de Haar compatible avec cette norme. Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ tel que $Q \supseteq P$, on en déduit les mesures de Haar sur $A_P^{Q, \infty}$ et A_P^∞ via l'isomorphisme H_P .

Soit dp la mesure de Haar sur $P(\mathbb{A})$ invariante à gauche normalisée de façon que $dx = dp dk$ (grâce à la décomposition d'Iwasawa). Notons $\rho_P^G = \rho_P$ l'élément de $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ tel que $d(\text{Ad}(m)n) = e^{2\rho_P(H_P(m))} dn$ pour $m \in M_P(\mathbb{A})$ et $n \in N_P(\mathbb{A})$. Il s'ensuit qu'il existe une unique mesure de Haar dm sur $M_P(\mathbb{A})$ telle que si l'on écrit $p = nm$ où $p \in P(\mathbb{A})$, $n \in N_P(\mathbb{A})$ et $m \in M_P(\mathbb{A})$ alors $dp = e^{-2\rho_P(H_P(m))} dndm$. Les mesures de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ et A_P^∞ induisent alors une unique mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})^1$, que l'on fixe, telle que la mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ soit le produit de mesures sur A_P^∞ et sur $M_P(\mathbb{A})^1$.

On introduit au passage certaines fonctions utiles dans les paragraphes 3.2 et 4.2. Soit v_P le volume dans \mathfrak{a}_P^G du paralléloétope engendré par $(\hat{\Delta}_P)^\vee$. Suivant le paragraphe 2 de [Art81], posons

$$\hat{\theta}_P(\mu) = v_P^{-1} \prod_{\tilde{\omega} \in \hat{\Delta}_P^\vee} \mu(\tilde{\omega}^\vee), \quad \mu \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*. \quad (1.6)$$

1.4 Fonctions lisses à support compact

Soit \mathbb{A}_f l'anneau des adèles finis et F_∞ le produit des toutes les complétions de F en places archimédiennes de sorte que $\mathbb{A} \cong F_\infty \times \mathbb{A}_f$. On pose $C_c^\infty(G(\mathbb{A})) = C_c^\infty(G(F_\infty)) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ et $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1) = C_c^\infty(G(F_\infty) \cap G(\mathbb{A})^1) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$, où $C_c^\infty(G(F_\infty))$ et $C_c^\infty(G(F_\infty) \cap G(\mathbb{A})^1)$ sont des espaces de fonctions lisses à support compact sur les groupes de Lie correspondants et $C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ c'est l'espace des fonctions localement constantes à support compact à valeurs complexes sur $G(\mathbb{A}_f)$.

1.5 Hauteurs

Soit V un F -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Fixons une F -base ξ_1, \dots, ξ_n de V . Pour une place v de F notons F_v le complété de F à v . Pour tout $x_v = \sum_{i=1}^n x_{v,i} \xi_i \in V \otimes_F F_v$ on définit sa norme par :

$$|x_v|_v := \sup_i |x_{v,i}|_v$$

où $|\cdot|_v$ c'est la valeur absolue standard sur F_v . Pour tout $x = (x_v)_v \in V \otimes_F \mathbb{A}$ on définit la hauteur de x par :

$$\|x\| := \prod_v |x_v|_v.$$

On fixe un plongement ρ de G dans GL_n . Pour tout $g_v \in G(F_v)$ on définit la norme de g_v , notée $|g_v|_v$, comme la norme de $(\rho(g_v), {}^t \rho(g_v)^{-1})$ vu comme un élément de $\mathfrak{gl}_n(F_v) \oplus \mathfrak{gl}_n(F_v)$ où $\mathfrak{gl}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)$. Pour tout $g = \prod_v g_v \in G(\mathbb{A})$ on définit la hauteur de g , notée $\|g\|$, comme $\|g\| := \prod_v |g_v|_v$.

Soit $B \in \mathcal{F}(M_0)$, on a alors les propriétés suivantes :

$$\exists c > 0, \forall g \in G(\mathbb{A}) \quad \|g\| > c, \quad (1.7)$$

$$\exists c > 0, \forall g_1, g_2 \in G(\mathbb{A}) \quad \|g_1 g_2\| < c \|g_1\| \|g_2\|, \quad (1.8)$$

$$\forall g \in G(\mathbb{A}) \quad \|g^{-1}\| = \|g\|, \quad (1.9)$$

$$\exists c, c' > 0, c' \in \mathbb{R}, \forall a \in A_B^\infty \quad c \|H_B(a)\| \leq \log \|a\| + c' \leq c'' \|H_B(a)\|, \quad (1.10)$$

$$\exists c > 0, \forall g \in \mathfrak{S}_B, \gamma \in G(F) \quad \|g\| \leq c \|\gamma g\|, \quad (1.11)$$

$$\exists c, t, t' > 0, \forall a \in A_G^\infty, g \in G(\mathbb{A})^1 \quad c \|a\|^{t'} \|g\|^t \leq \|ag\|, \quad (1.12)$$

$$\exists c > 0, \forall g \in G(\mathbb{A}) \quad \|H_B(x)\| \leq c(1 + \log \|x\|). \quad (1.13)$$

On note une conséquence immédiate des propriétés (1.7) et (1.12) :

$$\exists c, t > 0, \forall a \in A_G^\infty, g \in G(\mathbb{A})^1 \quad c \|g\|^t \leq \|ag\|. \quad (1.14)$$

1.6 Décomposition spectrale

Dans ce paragraphe on rappelle les résultats de la théorie spectrale de formes automorphes qu'on peut trouver dans [MW95].

Fixons un $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ et notons $\mathcal{F}(P_0)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant P_0 . Pour $Q \in \mathcal{F}(P_0)$, on écrira $\mathbb{X}_Q^G = \mathbb{X}_Q^G = N_Q(\mathbb{A})M_Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ et $\mathbb{X}_Q^1 = \mathbb{X}_Q^{G,1} = N_Q(\mathbb{A})M_Q(F) \backslash G(\mathbb{A})^1$.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0, P_0)$ et σ une représentation automorphe cuspidale de $M_P(\mathbb{A})^1$. On définit $\mathcal{H}_{P,\sigma}^G = \mathcal{H}_{P,\sigma}$ comme l'espace de fonctions $\phi : N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{F})A_P^\infty \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient

$$\forall x \in G(\mathbb{A}), ([M_P]^1 \ni m \mapsto \phi(mx)) \in L_\sigma^2([M_P]^1), \quad \text{et} \quad \int_K \int_{[M_P]^1} |\phi(mk)|^2 dm dk < \infty$$

où $L_\sigma^2([M_P]^1)$ c'est la partie σ -isotypique de $L^2([M_P]^1)$. Notons $\mathcal{H}_{P,\sigma}^{G,0} = \mathcal{H}_{P,\sigma}^0 \subseteq \mathcal{H}_{P,\sigma}$ le sous-espace des fonctions lisses en places infinies, localement constantes en places finies, K et \mathfrak{z} -finies, où \mathfrak{z} c'est le centre de l'algèbre enveloppante de la complexification d'algèbre de Lie de $G(\mathbb{A}^\infty)$.

Soient $V \subseteq \mathcal{H}_{P,\sigma}^0$ un sous-espace de dimension finie, $\Psi^G : (\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^G)^* \rightarrow V$ et $\Psi : \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \rightarrow V$ des fonctions de Paley-Wiener. On pose

$$\begin{aligned} \psi^G(x) &= \int_{i(\mathfrak{a}_P^G)^*} e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(x))} \Psi^G(\lambda, x) d\lambda, \quad x \in \mathbb{X}_P^1, \\ \psi(x) &= \int_{i\mathfrak{a}_P^*} e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(x))} \Psi(\lambda, x) d\lambda, \quad x \in \mathbb{X}_P, \end{aligned}$$

où $i(\mathfrak{a}_P^G)^* \subseteq (\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^G)^*$ (resp. $i\mathfrak{a}_P^* \subseteq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$) est muni de la mesure de Haar duale à celle sur \mathfrak{a}_P^G (resp. sur \mathfrak{a}_P). Pour tout $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ tel que $Q \supseteq P$ on note :

$$\begin{aligned} E_P^Q \psi^G(x) &= \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \psi^G(\delta x), \quad x \in \mathbb{X}_Q^1, \\ E_P^Q \psi(x) &= \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \psi(\delta x), \quad x \in \mathbb{X}_Q. \end{aligned}$$

On appelle $E_P^Q \psi^G$ et $E_P^Q \psi$ des pseudo-séries d'Eisenstein. Si $Q = G$ on note simplement $E_P = E_P^G$. On a alors $E_P^Q \psi^G \in L^2(\mathbb{X}_Q^1)$ et $E_P^Q \psi \in L^2(\mathbb{X}_Q)$.

On appelle donnée cuspidale de G un couple (M, σ) où M est un \mathbb{F} -sous-groupe de Levi de G contenant M_0 et σ est une représentation cuspidale de $M(\mathbb{A})^1$. On dit que deux données cuspidales (M, σ) et (M', σ') sont équivalentes s'il existe un $s \in \Omega$ tel que $sM = M'$ et $\sigma' \circ \text{Ad}(w_s)$ est équivalente à σ en tant qu'une représentation de M . On note \mathcal{X}^G l'ensemble de classes d'équivalences de données cuspidales de G .

Pour tout $\chi \in \mathcal{X}^G$ et $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ on note $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q)$), le complété L^2 de l'espace engendré par $E_P^Q \psi^G$ (resp. $E_P^Q \psi$) comme ci-dessus, où $P_0 \subseteq P \subseteq Q$ et $(M_P, \sigma) \in \chi$. La définition ne dépend pas du choix de $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ contenant Q . On a alors des décompositions orthogonales suivantes :

$$L^2(\mathbb{X}_Q^1) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}^G} L_\chi^2(\mathbb{X}_Q^1), \quad L^2(\mathbb{X}_Q) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}^G} L_\chi^2(\mathbb{X}_Q).$$

On a alors aussi pour tout $P \subseteq Q$ les décompositions analogues des espaces $L^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q,1})$ et $L^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q})$ par rapport à l'ensemble \mathcal{X}^{M_Q} . Pour tout $\chi \in \mathcal{X}^G$ et tout $P \subseteq Q$ on définit l'espace $L_\chi^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q,1})$ comme la somme directe des espaces $L_{\chi'}^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q,1})$ où χ' parcourt la pré-image de χ par l'application naturelle à fibre finie $\mathcal{X}^{M_Q} \rightarrow \mathcal{X}^G$. On définit $L_\chi^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q})$ de même façon. On a alors

$$L^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q,1}) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}^G} L_\chi^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q,1}), \quad L^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q}) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}^G} L_\chi^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q}).$$

Lemme 1.2. Soient $\chi \in \mathcal{X}^G$, $P, Q \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P \subseteq Q$ et $E_P^Q \psi \in L_\chi^2(\mathbb{X}_Q)$ une pseudo-série d'Eisenstein. Alors :

1) Soient $\lambda \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$ et A^∞ un sous-groupe de A_G^∞ . Alors, la fonction

$$\mathbb{X}_Q^1 \ni x \mapsto \int_{A^\infty} e^{\lambda(H_G(a))} E_P^Q \psi(ax) da$$

est bien définie et appartient à $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q^1)$.

2) Soient $K' \subseteq K$ un sous-groupe compact et $\phi : K' \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction

$$\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q} \ni x \mapsto \int_{K'} E_P^Q \psi(xk') e^{-\rho_Q(H_Q(x))} \phi(k') dk'.$$

est bien définie et appartient à $L_\chi^2(\mathbb{X}_{M_Q \cap P}^{M_Q})$.

1.7 Représentations régulières

On note $R_Q^{G,1}$ (resp. R_Q^G) la représentation régulière à droite (par multiplication à droite) du groupe $G(\mathbb{A})^1$ (resp. $G(\mathbb{A})$) sur $L^2(\mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $L^2(\mathbb{X}_Q)$). Les espaces $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q^1)$ et $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q)$ introduits dans le paragraphe précédent sont alors invariants.

La représentation $R_Q^{G,1}$ (resp. R_Q^G) induit une représentation de l'algèbre $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ (resp. $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$), notée aussi $R_Q^{G,1}$ (resp. R_Q^G), sur l'espace $L^2(\mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $L^2(\mathbb{X}_Q)$). Pour tout $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ et $\Phi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ les opérateurs $R_Q^{G,1}(f)$ et $R_Q^G(\Phi)$ sont intégrales, donnés par les noyaux

$$k_{f,Q}(x,y) = \sum_{\gamma \in M_Q(\mathbb{F})} \int_{N_Q(\mathbb{A})} k(x^{-1}\gamma ny) dn, \quad k_{\Phi,Q}(x,y) = \sum_{\gamma \in M_Q(\mathbb{F})} \int_{N_Q(\mathbb{A})} k(x^{-1}\gamma ny) dn.$$

Pour tout $\chi \in \mathcal{X}^G$, soit $\Pi_{Q,\chi}^{G,1}$ (resp. $\Pi_{Q,\chi}^G$) la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $L^2(\mathbb{X}_Q)$) à $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $L_\chi^2(\mathbb{X}_Q)$). L'opérateur $R_Q^{G,1}(f)\Pi_{Q,\chi}^{G,1}$ (resp. $R_Q^G(\Phi)\Pi_{Q,\chi}^G$) est alors intégrale et l'on note $k_{f,Q,\chi} \in L^2(\mathbb{X}_Q^1 \times \mathbb{X}_Q^1)$ (resp. $k_{\Phi,Q,\chi} \in L^2(\mathbb{X}_Q \times \mathbb{X}_Q)$) son noyau. Si $Q = G$ on écrit $k_f = k_{f,G}$, $k_{f,\chi} = k_{f,G,\chi}$ etc. On a donc :

$$k_{f,Q} = \sum_{\chi \in \mathcal{X}^G} k_{f,Q,\chi}, \quad k_{\Phi,Q} = \sum_{\chi \in \mathcal{X}^G} k_{\Phi,Q,\chi}.$$

Lemme 1.3. Soient $\Phi \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $P, Q \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P \subseteq Q$ et $\chi \in \mathcal{X}^G$.

1) Soient $\lambda \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$, A^∞ un sous-groupe de A_G^∞ et

$$\bar{\Phi}(x) = \int_{A^\infty} e^{\lambda(H_G(a))} \Phi(ax) da, \quad x \in G(\mathbb{A})^1.$$

Alors $\bar{\Phi} \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ et pour tout $x, y \in \mathbb{X}_Q^1$ on a

$$k_{\bar{\Phi},Q,\chi}(x,y) = \int_{A^\infty} e^{\lambda(H_G(a))} k_{\Phi,Q,\chi}(x, ay) da.$$

2) Soient K_1, K_2 deux sous-groupes compacts de K et $\Psi : K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Posons

$$\Phi_Q(x) = \int_{K_1} \int_{K_2} \int_{N_Q(\mathbb{A})} e^{\rho_Q(H_Q(x))} \Phi(k_1^{-1} x n k_2) \Psi_1(k_1, k_2) dn dk_2 dk_1, \quad x \in M_Q(\mathbb{A}).$$

Alors $\Phi_Q \in C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A}))$. Soient $\{\chi_Q\} \in \mathcal{X}^{M_Q}$ qui s'envoient sur χ par l'application naturelle $\mathcal{X}^{M_Q} \rightarrow \mathcal{X}^G$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{X}_{P \cap M_Q}^{M_Q}$ on a

$$\sum_{\chi_Q} k_{\Phi_Q, M_Q \cap P, \chi_Q}(x, y) = \int_{K_1} \int_{K_2} k_{\Phi, P, \chi}(x k_1, y k_2) e^{-\rho_Q(xy)} \Psi_1(k_1, k_2) dk_1 dk_2.$$

Démonstration. On expliquera le point 2), le point 1) étant analogue. Le résultat est claire sans χ . Pour démontrer le résultat avec χ , il suffit de montrer que l'opérateur intégrale sur $L^2(\mathbb{X}_{P \cap M_Q}^{M_Q})$ défini par le noyau $(x, y) \mapsto \int_{K_1} \int_{K_2} k_{\Phi, P, \chi}(xk_1, yk_2) e^{-\rho_Q(xy)} dk_1 dk_2$ agit trivialement sur $L_{\chi'}^2(\mathbb{X}_{P \cap M_Q}^{M_Q})$ pour tout $\chi' \neq \chi$. Pour cela, on décompose $k_{\Phi, P, \chi}(x, y)$ dans la base hilbertienne de $L_{\chi}^2(\mathbb{X}_P)$, que l'on peut supposer être composée de pseudo-séries d'Eisenstein, et l'on applique le lemme 1.2. La seule chose qui est à vérifier c'est le fait qu'on peut inverser l'intégrale avec la somme définissante $k_{\Phi, P, \chi}(x, y)$. L'argument que c'est possible est standard et repose sur la dite astuce de Selberg qui permet de se ramener à une fonction Φ de type $h * h^*$ où $h^*(x) = \overline{h(x^{-1})}$. \square

1.8 Quelques majorations

Soit \mathcal{U} l'algèbre enveloppante de $\text{Lie}(G(\mathbb{F}_\infty)) \otimes \mathbb{C}$. Elle agit sur $C^\infty(G(\mathbb{F}_\infty)) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(\mathbb{A}_f)$ à gauche et à droite. Pour $f \in C^\infty(G(\mathbb{F}_\infty)) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(\mathbb{A}_f)$ on note ces actions par $X * f$ et $f * Y$ respectivement, où $X, Y \in \mathcal{U}$. On notera aussi $R(X)f$ pour $f * X$ et si f est à plusieurs variables on note $R_i(X)f$ pour l'action de X à droite sur f par rapport à la i -ème variable.

Fixons désormais une $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$. Soient $X, Y \in \mathcal{U}$ et $\chi \in \mathcal{X}^G$. On a alors :

$$R_1(X)R_2(Y)K_{f, \chi}(x, y) = K_{X * f * Y, \chi}(x, y). \quad (1.15)$$

Lemme 1.4 (cf. [Art78], Corollaire 4.6, [MW95] paragraphe I.2.4). *Il existe des $c, N_0, N_1 > 0$ qui ne dépendent que de G telles que pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ on a :*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^G} |k_{f, P, \chi}(x, y)| \leq c \|x\|^{N_0} \|y\|^{N_0}, \quad \forall x, y \in G(\mathbb{A}), \quad (1.16)$$

$$\int_{A_G^\infty} \sum_{\chi \in \mathcal{X}^G} |k_{f, P, \chi}(x, ay)| da \leq c \|x\|^{N_1} \|y\|^{N_1}, \quad \forall x, y \in G(\mathbb{A})^1. \quad (1.17)$$

Lemme 1.5 (cf. [Art80], lemme 2.3). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$. La donnée pour tout $1 \leq i \leq n$ des sous-groupes paraboliques $Q_i \supseteq P$, des points $z_i, x_i \in G(\mathbb{A})$ et des nombres complexes $c_i \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{[N_P]} k_{f, Q_i}(z_i, nm x_i) dn = 0$$

pour tout $m \in M_P(\mathbb{F}) \backslash M_P(\mathbb{A})^1$ on a pour tout $\chi \in \mathcal{X}^G$ et tout $m \in M_P(\mathbb{F}) \backslash M_P(\mathbb{A})^1$

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{[N_P]} k_{f, Q_i, \chi}(z_i, nm x_i) dn = 0.$$

Corollaire 1.6 (cf. [Art80], pages 100-101). *Il existe un $T_f \in \mathfrak{a}_0$ qui ne dépend que du support de f tel que pour tous $z, x \in G(\mathbb{A})$, $\chi \in \mathcal{X}^G$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$ on a pour tout $m \in M_P(\mathbb{F}) \backslash M_P(\mathbb{A})^1$:*

$$\begin{aligned} k_{f, P, \chi}(z, mx) &= \hat{\tau}_P(H_P(z) - H_P(x) - T_f) k_{f, P, \chi}(z, mx), \\ k_{f, P, \chi}(mz, x) &= \hat{\tau}_P(H_P(x) - H_P(z) - T_f) k_{f, P, \chi}(mz, x). \end{aligned}$$

Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P_1 \subseteq P_2$. On pose σ_1^2 la fonction caractéristique de $H \in \mathfrak{a}_1$ tels que

$$\alpha(H) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_1^2, \quad \alpha(H) \leq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_1 \setminus \Delta_1^2, \quad \varpi(H) > 0 \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_2. \quad (1.18)$$

La fonction σ_1^2 a été introduite dans [Art78], paragraphe 6. Voici ses deux propriétés qu'on utilisera, dont les preuves se trouvent dans loc. cit.

Lemme 1.7. *Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P_1 \subseteq P_2$.*

i) On a

$$\tau_1^2 \hat{\tau}_2 = \sum_{Q \supseteq P_2} \sigma_1^Q.$$

ii) Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $H, X \in \mathfrak{a}_1^G$ tels que $\sigma_1^2(H - X) = 1$ on a

$$\|H\| \leq c(\|H_1^2\| + \|X\|)$$

où H_1^2 c'est la projection de H à \mathfrak{a}_1^2 .

iii) Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $T \in \mathfrak{a}_1$ tel que $\alpha(T) > \epsilon\|T\|$ pour tout $\alpha \in \Delta_1$ et tout $H_1 \in \mathfrak{a}_1^G$ tel que $\sigma_1^2(H - T) = 1$ on a

$$\|H_1\| \leq c\|H_1^2\|$$

où H_1^2 c'est la projection de H_1 à \mathfrak{a}_1^2 et la constante c ne dépend que de ϵ .

On rassemble finalement quelques résultats, et ses conséquences, de la section 5 de [Art78] dans le lemme suivant. Dans loc. cit. on suppose que les variables x, y ci-dessous appartiennent à $G(\mathbb{A})^1$, mais les preuves passent sans changement pour $x, y \in G(\mathbb{A})$, en prenant compte de la propriété (1.14) de la hauteur.

Lemme 1.8. i) Il existe des constantes positives N_1 et c telles que pour tout couple de sous-groupes paraboliques semi-standards $P_1 \subseteq P_2$ de G , tout $x \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{P_1}$ l'on a :

$$\sum_{\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} F^1(\delta x, T) \sigma_1^2(H_1^2(x) - T) \leq c e^{N_1 \|T\|} \|x\|^{N_1}.$$

ii) Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. Il existe des constantes positives c, N telles que pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ et tout $X \in \mathfrak{a}_P$

$$\sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} \hat{\tau}_P(H(\delta x) - X) \leq c \left(\|x\| e^{\|X\|} \right)^N.$$

En particulier, la somme est finie.

iii) Soient $P \in \mathcal{F}(M_0)$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $N \geq 0$. Ils existent des constantes positives c', N' telles que pour toute fonction ϕ sur $P(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A})$ et tout $x, y \in G(\mathbb{A})$ la somme :

$$\sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} |\phi(\delta x)| \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - H_P(y) - T)$$

est majorée par

$$c' \|x\|^{N'} \|y\|^{N'} \sup_{x' \in G(\mathbb{A})} (|\phi(x')| \|x'\|^{-N}).$$

Corollaire 1.9. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subseteq Q$, tout $\chi \in \mathcal{X}^G$ et tout $x, y \in G(\mathbb{A})$ on a

$$\int_{[N_P]} k_{Q, \chi}(nx, y) dn = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} k_{P, \chi}(x, \gamma y)$$

la somme étant finie.

Démonstration. Le résultat est clair sans χ . La somme est finie en vertu du corollaire 1.6 et du lemme 1.8 ii) ci-dessus. Le résultat suit maintenant en appliquant le lemme 1.5. \square

Soient $P, R \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P \subseteq R$. On invoque l'identité due à Arthur [Art78], proposition 1.1 :

$$\sum_{P \subseteq Q \subseteq R} (-1)^{d_Q^R} = \begin{cases} 0 & \text{si } P \neq R, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.19)$$

1.9 $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$

Soit W un F -espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et soit $V \subseteq W$ un sous-espace de dimension n , où $n \in \mathbb{N}$. Notons $\tilde{G} = \mathrm{GL}(W)$. Fixons un vecteur $e_0 \in W \setminus V$ et notons D_0 la droite qu'il engendre. On a alors $W = V \oplus D_0$ ce qui permet d'identifier $G = \mathrm{GL}(V)$ comme un sous-groupe de \tilde{G} stabilisant V et fixant e_0 . Choisissons M_0 un sous-groupe de Levi minimal de G et soit $M_{\tilde{0}}$ l'unique sous-groupe de Levi minimal de \tilde{G} contenant M_0 . On note $D_i \subseteq V$, où $i = 1, \dots, n$, les droites stabilisées par M_0 .

Les résultats des paragraphes précédentes s'appliquent aux groupes G et \tilde{G} et leur Levi's minimales M_0 et $M_{\tilde{0}}$. Les objets associées à \tilde{G} seront notés toujours avec un tilde. Pour le choix du sous-groupe compact maximal, on fixe des vecteurs non-nuls $e_i \in D_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ ce qui avec le choix du vecteur e_0 définit les isomorphismes $\tilde{G} \cong \mathrm{GL}_{n+1}$ et $G \cong \mathrm{GL}_n$. On pose alors $\tilde{K} = \prod_v \tilde{K}_v$ où, pour une place fini v de F on note $\tilde{K}_v = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_v)$, où \mathcal{O}_v c'est l'anneau des entiers de la complétion de F en v , pour une place réelle v on pose $\tilde{K}_v = O(n+1)$ -le groupe orthogonal anisotrope et pour une place complexe on met $\tilde{K}_v = U(n+1)$ -le groupe unitaire anisotrope. On pose aussi $K = \tilde{K} \cap G(\mathbb{A})$. Dans ce cas \tilde{K} et K vérifient les conditions du paragraphe 1.1 par rapport à $M_{\tilde{0}}$ et M_0 respectivement. Les inclusions $G \hookrightarrow \tilde{G}$ et $M_0 \hookrightarrow M_{\tilde{0}}$ induisent l'inclusion $\Omega^G \hookrightarrow \Omega^{\tilde{G}}$. On choisit aussi des représentants du groupe de Weyl $\Omega^{\tilde{G}}$ de \tilde{G} comme les éléments permutants les vecteurs e_i . On a alors pour tout $\tilde{s} \in \Omega^{\tilde{G}}$ que $w_{\tilde{s}} \in \tilde{G}(F) \cap \tilde{K}$ et si $s \in \Omega^G$ alors $w_s \in G(F) \cap K$.

On identifie \mathfrak{a}_0 et \mathfrak{a}_0^* avec des sous-espaces de $\mathfrak{a}_{\tilde{0}}$ et $\mathfrak{a}_{\tilde{0}}^*$ respectivement. En particulier la mesure de Haar et la norme euclidienne sur \mathfrak{a}_0 sont celles d'un sous-espace de $\mathfrak{a}_{\tilde{0}}$.

Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ on admet la notation :

$$P := \tilde{P} \cap G \in \mathcal{F}(M_0).$$

Pour un F -espace vectoriel \mathcal{V} on note $\mathcal{V}^* = \mathrm{Hom}_F(\mathcal{V}, F)$. On a alors $V^* \subseteq W^*$ grâce à la décomposition $W = V \oplus D_0$. Le groupe G (resp. \tilde{G}) agit naturellement sur V^* (resp. W^*) donc aussi sur $V \times V^*$ (resp. $W \times W^*$). Pour $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ on note $\mathcal{V}_{\tilde{P}} \subseteq V \times V^*$ le plus grand sous-espace de $V \times V^*$ stabilisé par \tilde{P} vu comme un sous-espace de $W \times W^*$. On note aussi $Z_{\tilde{P}} \subseteq V$ le plus petit sous-espace de V tel que $M_{\tilde{P}}$ stabilise $Z_{\tilde{P}} \oplus D_0 \subseteq W$.

On note $H_{\tilde{P}}$ le plus grand sous-groupe de M_P agissant trivialement sur $Z_{\tilde{P}}$ et $G_{\tilde{P}}$ le plus grand sous-groupe de M_P agissant trivialement sur $\mathcal{V}_{\tilde{P}}$. On note aussi $\tilde{G}_{\tilde{P}}$ le plus grand sous-groupe de $M_{\tilde{P}}$ agissant trivialement sur $\mathcal{V}_{\tilde{P}}$. On a alors $M_P = H_{\tilde{P}} \times G_{\tilde{P}}$ et $M_{\tilde{P}} = H_{\tilde{P}} \times \tilde{G}_{\tilde{P}}$ de façon que l'inclusion $M_P \hookrightarrow M_{\tilde{P}}$ est l'identité sur $H_{\tilde{P}}$ et induit l'inclusion $G_{\tilde{P}} \hookrightarrow \tilde{G}_{\tilde{P}}$ analogue à $G \hookrightarrow \tilde{G}$ mais associée à l'inclusion des espaces $Z_{\tilde{P}} \hookrightarrow Z_{\tilde{P}} \oplus D_0$. Dans ce contexte on pose $A_{\tilde{P}}^{st, \infty} := A_{H_{\tilde{P}}}^{\infty}$, $\mathfrak{a}_{\tilde{P}}^{st} := \mathfrak{a}_{H_{\tilde{P}}}$. Avec nos identifications $\mathfrak{a}_{\tilde{P}}^{st} \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{0}}$ ce qui détermine les mesures de Haar sur $\mathfrak{a}_{\tilde{P}}^{st}$ et sur $A_{\tilde{P}}^{st, \infty}$. On a $A_{\tilde{P}}^{st, \infty} \cap (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A})) = 1$ et $M_P(\mathbb{A}) = A_{\tilde{P}}^{st, \infty} (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}))$. On fixe donc l'unique mesure de Haar sur $H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ de façon que la mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ choisie soit produit de cette mesure et celle sur $A_{\tilde{P}}^{\infty}$. Soulignons qu'on a les décomposition suivantes :

$$M_P(\mathbb{A}) = A_{\tilde{P}}^{st, \infty} (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A})), \quad M_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) = A_{\tilde{P}}^{st, \infty} (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})). \quad (1.20)$$

L'application naturelle $A_{\tilde{P}}^{st, \infty} \rightarrow A_{\tilde{P}}^{\tilde{G}, \infty}$ est un isomorphisme. On note $j_{\tilde{P}}$ son Jacobien et on note $\iota_{\tilde{P}}^{st} : (\mathfrak{a}_{\tilde{P}, \mathbb{C}}^{st})^* \rightarrow (\mathfrak{a}_{\tilde{P}, \mathbb{C}}^{st})^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\tilde{P}}^{st}, \mathbb{C}) = \mathfrak{a}_{H_{\tilde{P}}, \mathbb{C}}^*$ l'isomorphisme induit. Si $\tilde{P} = \tilde{G}$ on met $j_{\tilde{P}} = 1$. Notons qu'on a l'égalité suivante

$$H_{\tilde{P}}(a) = H_P(a) \quad \forall a \in A_{\tilde{P}}^{st, \infty}.$$

Ainsi, pour toute fonction ϕ sur $\mathfrak{a}_{\tilde{P}}$ qui est $\mathfrak{a}_{\tilde{G}}$ -invariante, et tout $\lambda \in (\mathfrak{a}_{\tilde{P},\mathbb{C}}^{st})^*$ on a :

$$\int_{A_{\tilde{P}}^{st,\infty}} e^{\lambda(H_P(a))} \phi(H_P(a)) da = j_{\tilde{P}}^{-1} \int_{A_{\tilde{P}}^{\tilde{G},\infty}} e^{\lambda(H_{\tilde{P}}(a))} \phi(H_{\tilde{P}}(a)) da = j_{\tilde{P}}^{-1} \int_{\mathfrak{a}_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}} e^{\lambda(H)} \phi(H) dH \quad (1.21)$$

Fixons une F-base de V . Cette base, couplée avec le vecteur $e_0 \in D_0$ définit un plongement de \tilde{G} dans GL_{n+1} ce qui définit, en vertu de la discussion dans le paragraphe 1.5, une hauteur sur $\tilde{G}(\mathbb{A})$ que l'on fixe. On définit la hauteur sur $G(\mathbb{A})$ comme la restriction de la hauteur sur $\tilde{G}(\mathbb{A})$. On a dans ce cas :

Lemme 1.10. *Il existe des constantes $c_1, c_2, t_1, t_2 > 0$ telles que*

$$c_1 \|x\|^{t_1} \geq \|\tilde{x}^1\| \geq c_2 \|x\|^{t_2}, \quad \forall x \in G(\mathbb{A}),$$

où $\tilde{x}^1 \in \tilde{G}(\mathbb{A})^1$ c'est la projection de x sur $\tilde{G}(\mathbb{A})^1$ selon la décomposition $\tilde{G}(\mathbb{A}) = \tilde{G}(\mathbb{A})^1 A_{\tilde{G}}^\infty$.

Démonstration. En utilisera la notation du paragraphe 1.5. Pour une place v de F on note $|\cdot|_{G,v}$ la norme sur $G(F_v)$ définie à partir de la base de V que l'on a fixée pour définir la hauteur sur $\tilde{G}(\mathbb{A})$. On note aussi $\|\cdot\|_G$ la hauteur sur $G(\mathbb{A})$ définie comme produit des $|\cdot|_{G,v}$.

Soit $x \in G(\mathbb{A})$ et soit $\tilde{x}^1 \in \tilde{G}(\mathbb{A})^1$ la projection de x sur $\tilde{G}(\mathbb{A})^1$ selon la décomposition $\tilde{G}(\mathbb{A}) = \tilde{G}(\mathbb{A})^1 A_{\tilde{G}}^\infty$. L'inégalité $c_1 \|x\|^{t_1} \geq \|\tilde{x}^1\|$ découle de la propriété (1.14) de la hauteur appliquée au groupe \tilde{G} .

Soit $x = x^1 a$ la décomposition de $x \in G(\mathbb{A})$ selon $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 A_G^\infty$. Pour une place v de F on note x_v^1 et \tilde{x}_v^1 la v -composante de x^1 et \tilde{x}^1 respectivement. Pour toute place non-archimédienne v on a donc $x_v^1 = \tilde{x}_v^1$. Pour toute place archimédienne v de F on a par contre

$$|\tilde{x}_v^1|_v = \max(|a|_{G,v}^{\frac{n}{n+1}}, |x_v^1 a^{\frac{1}{n+1}}|_{G,v})$$

où $a^{\frac{1}{n+1}}$ c'est l'unique élément de A_G^∞ tel que $(a^{\frac{1}{n+1}})^{n+1} = a$. Puisque $\max(|b|, |c|) \geq \sqrt{|b||c|}$, en appliquant la propriété (1.14) au groupe G , on trouve

$$\prod_v \max(|a|_{G,v}^{\frac{n}{n+1}}, |x_v^1 a^{\frac{1}{n+1}}|_{G,v}) \geq c \|a\|_G^{t_1} \|x^1\|_G^{t_2}$$

pour certains constantes positives $c, t_1, t_2 > 0$. En prenant $t_3 = \min(t_1, t_2)$ et en utilisant les propriétés (1.7) et (1.8) de la hauteur on trouve que cela est plus grand que $c' \|x\|_G^{t_3}$ pour une constante $c' > 0$. En utilisant l'équivalence des hauteurs sur $G(\mathbb{A})$, ceci est plus grand que $c'' \|x\|^{t_4}$ pour certains $c'', t_4 > 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

1.10 Les groupes unitaires

Soit E une extension quadratique de F et σ le générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(E/F)$. Posons $W_E = W \otimes_F E$, $V_E = V \otimes_F E$ et $D_{0,E} = D_0 \otimes_F E$. Supposons la donnée d'une forme σ -hermitienne non-dégénérée $\tilde{\Phi}$ sur W_E de façon que $\nu_0 := \tilde{\Phi}(e_0, e_0) \neq 0$ et que V_E soit orthogonal à $D_{0,E}$. Notons $\tilde{U} = U(W_E, \tilde{\Phi})$ et $U = U(V_E, \tilde{\Phi}|_{V_E})$ les groupes unitaires associés. Ces sont des F-groupes algébriques et l'on voit U comme un sous-groupe de \tilde{U} grâce à l'inclusion $V_E \hookrightarrow W_E = V_E \oplus D_{0,E}$. Comme dans le cas du groupe linéaire, les objets associés à \tilde{U} seront notés toujours avec un tilde.

Choisissons M_0 un sous-groupe de Levi minimal de U et notons $M_{\tilde{0}}$ le sous-groupe de Levi de \tilde{U} contenant M_0 , minimal pour cette propriété. Le groupe $M_{\tilde{0}}$ n'est pas forcément minimal, mais il est uniquement déterminé par M_0 . Pour se placer dans le contexte du paragraphe 1.1 on choisi aussi un sous-groupe de Levi minimal $M_{\tilde{U},\min}$ de \tilde{U} contenu dans $M_{\tilde{0}}$. On fixe un compact maximal admissible K de $U(\mathbb{A})$ ainsi que \tilde{K} dans $\tilde{U}(\mathbb{A})$ qui contient K .

Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ on note $P = U \cap \tilde{P}$. L'application $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}) \ni \tilde{P} \mapsto P \in \mathcal{F}(M_0)$ est alors une bijection. On va écrire son inverse. Tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ est défini comme le stabilisateur du drapeau de type

$$0 = V_{0,E} \subsetneq V_{1,E} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{k,E}$$

où $k \geq 0$ et pour $0 \leq i \leq k$ les $V_{i,E}$ sont des sous-E-espaces de V_E isotropes, i.e. $\Phi(v, w) = 0$ pour tout $v, w \in V_E$. On définit donc $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ comme le stabilisateur du même drapeau que P mais vu dans W_E .

On va réaliser le groupe Ω^U comme un sous-groupe de $\Omega^{\tilde{U}}$. Soit Z le plus petit sous-espace non-isotrope de V stabilisé par M_0 . Fixons une base e_1, \dots, e_d du plus grand sous-espace isotrope de V stabilisé par M_0 . Il existe alors des uniques vecteurs isotropes $f_1, \dots, f_d \in V$ tels que $\Phi(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et tels que M_0 stabilise l'espace engendré par f_1, \dots, f_d . On réalise alors le groupe de Weyl de Ω^U comme un sous-groupe de $U(F)$ qui agit trivialement sur Z et qui est engendré par les permutations de vecteurs e_1, \dots, e_d et par les involutions σ_i tels que $\sigma_i(e_i) = f_i$, $\sigma_i(f_i) = e_i$, $\sigma_i(f_j) = f_j$ et $\sigma_i(e_j) = e_j$ pour $i = 1, \dots, d$ et $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$. Le groupe de Weyl $\Omega^{\tilde{U}}$ admet alors une construction identique dans laquelle on peut utiliser les mêmes vecteurs e_i, f_j et, peut-être, deux vecteurs additionnels. Il est clair alors qu'on a $\Omega^U \subseteq \Omega^{\tilde{U}}$.

Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$, l'inclusion naturelle $A_P \hookrightarrow A_{\tilde{P}}$ est un isomorphisme, on identifie alors ces groupes, en utilisant toujours A_P . Cette identification identifie \mathfrak{a}_0 avec $\mathfrak{a}_{P_{\tilde{0}}}$ où $P_{\tilde{0}} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{0}})$ quelconque. On a dans ce cas

$$H_{\tilde{P}}(x) = H_P(x) \quad \forall x \in U(\mathbb{A}).$$

En plus, comme on explique dans le paragraphe 2.4 de [Zyd15b], pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ on a que Δ_P et $\Delta_{\tilde{P}}$ ainsi que $\hat{\Delta}_P$ et $\hat{\Delta}_{\tilde{P}}$ sont égaux à $1/2$ -près. Il s'ensuit que pour tout $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$, tout $x \in U(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_0$ on a

$$\tau_1^2(H_1(x) - T) = \tau_1^{\tilde{2}}(H_1(x) - T), \quad \hat{\tau}_1^2(H_1(x) - T) = \hat{\tau}_1^{\tilde{2}}(H_1(x) - T). \quad (1.22)$$

On fixe un $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ et on note $P_{\tilde{0}} = \tilde{P}_0$ l'unique élément de $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ dont l'intersection avec U égale P_0 . On fixe une chambre positive $\mathfrak{a}_0^+ := \mathfrak{a}_{P_0}^+$. Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P_0 . Pour tout $T \in \mathfrak{a}_0^+$ on note T_P la projection de T à \mathfrak{a}_P . Notons que $\mathfrak{a}_P^+ = \mathfrak{a}_{\tilde{P}}^+$. On écrira donc parfois $T_{\tilde{P}}$ au lieu de T_P et \mathfrak{a}_0^+ au lieu de \mathfrak{a}_0^+ .

Fixons $\tilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{U}, \min})$ contenu dans $P_{\tilde{0}}$. Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P_0 . Il est démontré dans [IYb], lemme 2.1, qu'on peut, et on va, choisir les domaines de Siegel $\mathfrak{S}_{\tilde{B}}^{\tilde{P}}$ de $\tilde{U}(\mathbb{A})$ de façon qu'on ait

$$\mathfrak{S}_{P_0}^P \subseteq \mathfrak{S}_{\tilde{B}}^{\tilde{P}}. \quad (1.23)$$

On pose alors $F^P(\cdot, \cdot) := F_{P_0}^P(\cdot, \cdot)$ et $F^{\tilde{P}}(\cdot, \cdot) = F_{\tilde{B}}^{\tilde{P}}(\cdot, \cdot)$ où $F_{P_0}^P$ est définie dans le paragraphe 1.2. On a alors le résultat suivant.

Lemme 1.11. *Il existe un $T_+ + \in \mathfrak{a}_0^+$ tel que pour tous $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $x \in U(\mathbb{A})$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P_0 on a*

$$F^P(x, T) = F^{\tilde{P}}(x, T).$$

Démonstration. Soit $\tilde{T}_+ \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}}^+$ tel que le lemme 6.4 de [Art78] appliqué au groupe \tilde{U} et son sous-groupe parabolique minimal \tilde{B} , soit vrai pour tout $\tilde{T} \in \tilde{T}_+ \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}}^+$. On fixe $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ de même façon par rapport au groupe U et son sous-groupe minimal P_0 , en demandant en plus que la projection de $\tilde{T}_+ + \mathfrak{a}_{\tilde{B}}^+$ à \mathfrak{a}_0 contienne $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$.

Soient alors $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $x \in U(\mathbb{A})$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P_0 . En utilisant les propriétés (1.22) et (1.23) on voit que $F^P(x, T) \leq F^{\tilde{P}}(x, T)$. Supposons que $F^{\tilde{P}}(x, T) = 1$. En vertu du lemme 6.4 de [Art78] on a

$$\sum_{P_0 \subseteq R \subseteq P} \sum_{\delta \in R(\mathbb{F}) \setminus P(\mathbb{F})} F^R(\delta x, T) \tau_R^P(H_R(\delta x) - T) = 1.$$

Si $F^P(x, T) \neq 1$ on a $F^R(\delta_0 x, T) \tau_R^P(H_R(\delta_0 x) - T) = 1$ pour certains $P_0 \subseteq R \subseteq P$ et $\delta_0 \in R(\mathbb{F}) \setminus P(\mathbb{F})$. Soit alors $\tilde{T} \in \tilde{T}_+ \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}}^+$ dont la projection à \mathfrak{a}_0 vaut T . On a pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{B}}$ que $\varpi(\tilde{T}) \geq \varpi(T)$. On voit donc que pour tout $\tilde{Q} \supseteq \tilde{B}$ on a $F_{\tilde{B}}^{\tilde{Q}}(\cdot, T) \leq F_{\tilde{B}}^{\tilde{Q}}(\cdot, \tilde{T})$. En particulier, d'après ce qu'on a démontré, on trouve que $F_{\tilde{B}}^{\tilde{R}}(\delta_0 x, \tilde{T}) = F_{\tilde{B}}^{\tilde{P}}(x, \tilde{T}) = 1$. En vertu des égalités (1.22) on a $\tau_{\tilde{R}}^{\tilde{P}}(H_{\tilde{R}}(\delta_0 x) - \tilde{T}) = 1$. Mais pour tout $\alpha \in \Delta_{\tilde{P}}^{\tilde{R}}$ on a $\alpha(\tilde{T}) = \alpha(T)$ donc on a $\tau_{\tilde{R}}^{\tilde{P}}(H_{\tilde{R}}(\delta_0 x) - \tilde{T}) = 1$. Soit $\tilde{\delta}_0 \in \tilde{R}(\mathbb{F}) \setminus \tilde{P}(\mathbb{F})$ la projection de δ_0 . On a donc $F^{\tilde{R}}(\tilde{\delta}_0 x, \tilde{T}) \tau_{\tilde{R}}^{\tilde{P}}(H_{\tilde{R}}(\tilde{\delta}_0 x) - \tilde{T}) = 1$ et $F^{\tilde{P}}(x, \tilde{T}) = 1$. On obtient donc un absurde en utilisant de nouveau le lemme 6.4 de loc. cit. \square

On fixe donc T_+ comme dans le lemme 1.11 ci-dessus.

On voit donc que, tant que x appartient à $U(\mathbb{A})$, on peut utiliser la notation avec le tilde ou sans interchangeablement dans le cas du groupe unitaire. Au début, pour souligner les similarités avec le cas linéaire on va utiliser celle avec un tilde, sinon on va opter pour la notation plus économique sans le tilde.

1.11 $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathbb{E}/\mathbb{F}} \mathrm{GL}_n$

Pour tout E-groupe algébrique H on note $H_{\mathbb{E}} = \mathrm{Res}_{\mathbb{E}/\mathbb{F}} H$.

On considère les groupes $G_{\mathbb{E}} := \mathrm{Res}_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}(\mathrm{GL}(V_{\mathbb{E}}))$ et $\tilde{G}_{\mathbb{E}} := \mathrm{Res}_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}(\mathrm{GL}(W_{\mathbb{E}}))$. L'inclusion des F-espaces $V \hookrightarrow V_{\mathbb{E}} = V \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{E}$ induit l'inclusion $g \mapsto g \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ de G dans $G_{\mathbb{E}}$ que l'on fixe. On a de même $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}_{\mathbb{E}}$ grâce à $W \hookrightarrow W_{\mathbb{E}} = W \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$. On voit donc tous les groupes G , $G_{\mathbb{E}}$ et \tilde{G} comme des F-sous-groupes de $\tilde{G}_{\mathbb{E}}$. Soit $M_{0,\mathbb{E}}$ le sous-F-groupe de Levi minimal de $G_{\mathbb{E}}$ défini comme le stabilisateur des mêmes droites que M_0 mais tensorisées par \mathbb{E} . On définit $M_{\tilde{0},\mathbb{E}}$ de même façon par rapport à $M_{\tilde{0}}$. Cela nous place dans le cadre du paragraphe 1.1 ainsi que 1.9. On fixe le compact maximal $\tilde{K}_{\mathbb{E}}$ de $\tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A}) = \tilde{G}(\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E})$ de même façon qu'on l'a fait dans le paragraphe 1.9 pour le groupe $\tilde{G}(\mathbb{A})$, par rapport à la même base de W . On pose $K_{\mathbb{E}} = \tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A}) \cap \tilde{K}_{\mathbb{E}}$. On a donc $K \subseteq K_{\mathbb{E}}$ et $\tilde{K} \subseteq \tilde{K}_{\mathbb{E}}$. On identifie les groupes de Weyl Ω^G et $\Omega^{G_{\mathbb{E}}}$ ainsi que $\Omega^{\tilde{G}}$ et $\Omega^{\tilde{G}_{\mathbb{E}}}$ ce qui nous fixe les représentants des groupes de Weyl Ω^G et $\Omega^{\tilde{G}}$ avec les choix qu'on a fait dans le paragraphe 1.9.

Notons que l'application $\mathcal{F}(M_{0,\mathbb{E}}) \ni P_{\mathbb{E}} \mapsto P = P_{\mathbb{E}} \cap G \in \mathcal{F}(M_0)$ est une bijection. Pour un $P \in \mathcal{F}(M_0)$ on note alors $P_{\mathbb{E}} \in \mathcal{F}(M_{0,\mathbb{E}})$ le sous-groupe dont intersection avec G vaut P . Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. L'inclusion $M_P(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_{P_{\mathbb{E}}}(\mathbb{A})$ induit un isomorphisme $\mathfrak{a}_P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{P_{\mathbb{E}}}$ de façon que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M_P(\mathbb{A}) & \hookrightarrow & M_{P_{\mathbb{E}}}(\mathbb{A}) \\ H_P \downarrow & & \downarrow H_{P_{\mathbb{E}}} \\ \mathfrak{a}_P & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{a}_{P_{\mathbb{E}}} \end{array}$$

soit commutatif. On identifie alors $\mathfrak{a}_{P_{\mathbb{E}}}$ avec \mathfrak{a}_P et $\mathfrak{a}_{P_{\mathbb{E}}}^*$ avec \mathfrak{a}_P^* . On a donc pour tout $x \in G(\mathbb{A}) \hookrightarrow G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$

$$H_P(x) = H_{P_{\mathbb{E}}}(x).$$

On utilisera donc la notation H_P partout. En plus, l'inclusion $A_P \hookrightarrow A_{P_{\mathbb{E}}}$ est un isomorphisme. On a donc $\Delta_P = \Delta_{P_{\mathbb{E}}}$ et $\hat{\Delta}_P = \hat{\Delta}_{P_{\mathbb{E}}}$ etc. Il s'ensuit que pour tous $P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$, $x \in G(\mathbb{A})$ et

tout $T \in \mathfrak{a}_0$ on a

$$\tau_{P_1}^{P_2}(H_P(x) - T) = \tau_{P_{1,E}}^{P_{2,E}}(H_{P,E}(x) - T). \quad (1.24)$$

De même pour les fonctions $\hat{\tau}$. On voit donc qu'on peut omettre l'indice E dans ces situations. Notons pourtant qu'on a

$$2\rho_P = \rho_{P,E} \in \mathfrak{a}_P^*.$$

La discussion ci-dessus s'applique mot par mot dans le cas $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}_E$ et un $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{G}})$.

On choisit pour tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ (resp. $\tilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{G}})$) des domaines de Siegel $\mathfrak{S}_B^G \subseteq G(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{S}_{B_E}^{G_E} \subseteq G_E(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{S}_{\tilde{B}}^{\tilde{G}} \subseteq \tilde{G}(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{S}_{\tilde{B}_E}^{\tilde{G}_E} \subseteq \tilde{G}_E(\mathbb{A})$), comme dans le paragraphe 1.2, de façon qu'on ait $\mathfrak{S}_B^G \subseteq \mathfrak{S}_{B_E}^{G_E}$ (resp. $\mathfrak{S}_{\tilde{B}}^{\tilde{G}} \subseteq \mathfrak{S}_{\tilde{B}_E}^{\tilde{G}_E}$).

On fixe un $\tilde{B}_0 \in \mathcal{F}(M_{\tilde{G}})$ et on note $\mathfrak{a}_0^+ := \mathfrak{a}_{\tilde{B}_0}^+$. Soit $T \in \mathfrak{a}_0$, pour tout $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{G}})$ on note alors $T_{\tilde{Q}} \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$ la projection de $s^{-1}T$ à $\mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$, où $s \in \Omega^{\tilde{G}}$ est tel que $s^{-1}\tilde{B} \subseteq \tilde{Q}$. Soit $s \in \Omega^{\tilde{G}}$. En utilisant le fait que $w_s \in \tilde{G}(\mathbb{F}) \cap \tilde{K}$ on a alors pour tout $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}$ et tout $x \in \tilde{G}(\mathbb{A})$:

$$\hat{\tau}_{s\tilde{P}}^{s\tilde{Q}}(H_{s\tilde{P}}(x) - T) = \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(w_s^{-1}x) - s^{-1}T), \quad \tau_{s\tilde{P}}^{s\tilde{Q}}(H_{s\tilde{P}}(x) - T) = \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(w_s^{-1}x) - s^{-1}T).$$

Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0)$ et $s \in \Omega^{\tilde{G}}$ tel que $s\tilde{B}_0 \subseteq \tilde{P}$, on pose alors

$$F^{\tilde{P}}(\tilde{x}, T) = F_{s\tilde{B}_0}^{\tilde{P}}(\tilde{x}, T_{s\tilde{B}_0}), \tilde{x} \in \tilde{G}(\mathbb{A}), \quad F^{\tilde{P}_E}(\tilde{x}, T) = F_{s\tilde{B}_{0,E}}^{\tilde{P}_E}(\tilde{x}, T_{s\tilde{B}_0}), \tilde{x} \in \tilde{G}_E(\mathbb{A}).$$

La définition ne dépend pas du choix de s .

Lemme 1.12. *Il existe un $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ tel que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0)$ on a*

$$F^{\tilde{P}}(\tilde{x}, T) = F^{\tilde{P}_E}(\tilde{x}, T).$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.11. □

On fixe T_+ comme dans le lemme 1.12 ci-dessus.

Vu les relations (1.24) et le lemme 1.12 ci-dessus on écrira simplement τ_P au lieu de τ_{P_E} , $F^{\tilde{P}}$ au lieu de $F^{\tilde{P}_E}$ etc.

Puisqu'on considère les groupes G et \tilde{G} comme des sous-groupes de G_E et \tilde{G}_E respectivement, plongés tous dans \tilde{G}_E , pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{G}})$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$ on a $\tilde{P}_E(\mathbb{F}) = \tilde{P}(\mathbb{F})$, $P_E(\mathbb{F}) = P(\mathbb{F})$, de même pour les parties de Levi et sous-groupes unipotentes. On écrira alors $P(\mathbb{F})$ au lieu de $P_E(\mathbb{F})$ etc. En ce qui concerne les points adéliques, on garde l'écriture $P_E(\mathbb{A})$ etc.

2 Opérateurs de troncature

2.1 Les sous-groupes paraboliques relativement standards

Soient H et \tilde{H} des F-groupes réductif munis d'inclusion $H \hookrightarrow \tilde{H}$. On pense principalement aux $H = U \hookrightarrow \tilde{U} = \tilde{H}$, $H = G_E \hookrightarrow \tilde{G}_E = \tilde{H}$ et $H = \tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}_E = \tilde{H}$. Tout ce qu'on a fixé dans le paragraphe 1.1 s'applique à H . Soit $M_H := M_0$ -un sous-groupe de Levi minimal de H et on choisit un sous-groupe de Levi $M_{\tilde{H}}$ de \tilde{H} qui contient M_H et minimal pour cette propriété (dans les cas qui nous intéressent il est uniquement déterminé par M_H). On fixe $P_H \in \mathcal{F}(M_H)$ et on note $\mathcal{F}(P_H) = \{P \in \mathcal{F}(M_H) | P \supseteq P_H\}$ ainsi que $\mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H) = \{\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{H}}) | P_H \subseteq \tilde{P}\}$. Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H)$ on note $P := \tilde{P} \cap H$, alors $P \in \mathcal{F}(P_H)$.

Le cas $G_E \hookrightarrow \tilde{G}_E$. On prend $M_{G_E} = M_{0,E}$ et $M_{\tilde{G}_E} = M_{\tilde{0},E}$. On fixe un $B \in \mathcal{P}(M_0)$ et on pose $P_{G_E} = B_E$. La restriction de scalaires induit une bijection entre $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et $\mathcal{F}(M_{\tilde{0},E}, B_E)$

et il sera plus commode d'utiliser ce premier ensemble dans le pratique. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ les *sous-groupes paraboliques relativement standards* de \tilde{G} et les éléments de $\mathcal{F}(B)$ les sous-groupes paraboliques standards de G . On note que c'est le seul cas qu'on considère où il n'y a pas de bijection entre $\mathcal{F}(P_H)$ et $\mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H)$, du coup c'est le seul cas en réalité où on utilisera l'ensemble $\mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H)$.

Le cas $U \hookrightarrow \tilde{U}$. On prend $M_U = M_0$, $M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{0}}$ et $P_U = P_0$ que l'on a déjà fixé dans le paragraphe 1.10. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(P_0)$ les sous-groupes paraboliques standards de U . Il résulte de la discussion dans le paragraphe 1.10 que $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, P_0) \ni \tilde{P} \mapsto P = \tilde{P} \cap U \in \mathcal{F}(P_0)$ est une bijection. Dans le contexte des groupes unitaires on appellera parfois aussi les éléments de $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, P_0)$ les *sous-groupes paraboliques relativement standards* de \tilde{U} .

Le cas $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}_E$. On prend $M_{\tilde{G}} = M_{\tilde{0}}$ et $M_{\tilde{G}_E} = M_{\tilde{0}, E}$. Pour tout choix d'un sous-groupe de Borel $\tilde{B} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ on a alors $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}, E}, \tilde{B}) = \mathcal{F}(\tilde{B}_E)$ qui est en bijection avec $\mathcal{F}(\tilde{B})$. On ne fixe pas le groupe \tilde{B} qu'on laissera varier.

On utilisera alors les groupes H et \tilde{H} dans ces trois contextes dans cette section. Notons qu'on a alors la généralisation du lemme 6.4 de [Art78] suivante :

Lemme 2.1. *Pour tous $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H)$, $x \in H(\mathbb{A})$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$\sum_{\mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H) \ni \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} F^{\tilde{P}}(\delta x, T_{\tilde{P}}) \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) = 1.$$

Démonstration. Dans les cas $U \hookrightarrow \tilde{U}$ et $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}_E$ c'est une conséquence des lemmes 1.11 et 1.12 respectivement. Dans le cas $\tilde{G}_E \hookrightarrow \tilde{G}_E$ il nous faut supposer que pour tout sous-groupe de Borel relativement standard \tilde{B}_E de \tilde{G} les compacts $\omega_{\tilde{B}_E}$ vérifient $\omega_{B_E} \subseteq \omega_{\tilde{B}_E}$ (ce qui est possible car ils contiennent B). Le lemme est démontré alors dans [IYa], lemme 2.3, et traduit dans ce langage dans [Zyd15a], proposition 1.3. \square

Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{H}}, P_H)$ et $\phi \in \mathcal{B}_{loc}(\tilde{Q}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{H}(\mathbb{A}))$ on notera

$$\phi_{\tilde{Q}}(x) = \int_{[N_{\tilde{Q}}]} \phi(nx) dn, \quad x \in N_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) M_{\tilde{Q}}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{H}(\mathbb{A}).$$

2.2 Opérateur de troncature de Jacquet-Lapid-Rogawski

Fixons $\tilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{0}})$ un sous-groupe de Borel de \tilde{G} . Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{B})$ et ϕ une fonction localement intégrable sur $\tilde{Q}(E) \backslash \tilde{G}_E(\mathbb{A})$. On note pour $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{0}}$

$$\Lambda_{JLR}^{\tilde{Q}, T} \phi(x) = \sum_{\tilde{B} \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) \phi_{\tilde{P}_E}(\delta x), \quad x \in N_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) M_{\tilde{Q}}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}).$$

L'opérateur est bien défini car les sommes $\sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})}$ portent sur des ensembles finis en vertu du lemme 1.7 ii). Il dépend du choix du sous-groupe de Borel \tilde{B} qu'on précisera chaque fois. La notation Λ_{JLR} vient du fait que cet opérateur a été introduit dans [JLR99]. Dans loc. cit. on trouve les démonstrations des assertions présentées dans ce paragraphe.

Lemme 2.2. *Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{B})$. Alors pour tout $x \in \tilde{G}(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{0}}$ on a*

$$\phi_{\tilde{Q}_E}(x) = \sum_{\tilde{B} \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) \Lambda_{JLR}^{\tilde{P}, T} \phi(\delta x).$$

On a aussi la propriété de décroissance suivante :

Proposition 2.3. Soient $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{B})$, $r_1, r_2 \geq 0$ et $\tilde{K}_0 \subseteq M_{\tilde{Q}_E}(\mathbb{A}_f)$ un compact ouvert. Il existe alors un sous-ensemble fini $\{X\}$ de l'algèbre enveloppante de la complexification de l'algèbre de Lie de $M_{\tilde{Q}_E}(\mathbb{A})^1 \cap M_{\tilde{Q}_E}(\mathbb{F}_\infty)$ tel que pour tout espace mesurable $(\Omega, d\omega)$, tout $\phi : \Omega \rightarrow C^\infty(\tilde{Q}(E) \backslash \tilde{G}_E(\mathbb{A}) / \tilde{K}_0)$ mesurable, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tout $x \in \mathfrak{S}_{\tilde{B} \cap M_{\tilde{Q}}}^{M_{\tilde{Q}}} \cap M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1$ on a que l'expression

$$\int_{\Omega} |\Lambda_{JLR}^{\tilde{Q}, T} \phi(\omega, x)| d\omega$$

où on applique l'opérateur à la variable x , est majorée par

$$\|x\|^{-r_1} \sum_X \sup_{\tilde{y} \in M_{\tilde{Q}_E}(\mathbb{A})^1} \left(\|\tilde{y}\|^{-r_2} \int_{\Omega} \left| \int_{[N_{\tilde{Q}_E}]} R(X) \phi(\omega, \tilde{n}\tilde{y}) d\tilde{n} \right| d\omega \right).$$

2.3 Opérateur de troncature relatif sur G

Dans ce paragraphe on introduit un opérateur de troncature qui tronque les fonctions sur $G_E(\mathbb{A})$ en prenant en compte le centre de G_E . Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}_0}, B)$, une fonction localement intégrable ϕ sur $Q(E) \backslash G_E(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}_0}$ on pose

$$\Lambda_m^{T, \tilde{Q}} \phi(x) = \sum_{B \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) \phi_{P_E}(\delta x), \quad x \in N_Q(\mathbb{A}) M_Q(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A})$$

où la somme porte sur les sous-groupes paraboliques de \tilde{G} qui contient B (i.e. sous-groupes paraboliques relativement standards) qui sont contenus dans \tilde{Q} . Tout comme l'opérateur Λ_{JLR} , l'opérateur Λ_m est bien défini et vérifie la formule d'inversion suivante :

Lemme 2.4. Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}_0}, B)$. Alors pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}_0}$ on a

$$\phi_{Q_E}(x) = \sum_{B \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) \Lambda_m^{\tilde{P}, T} \phi(\delta x).$$

Démonstration. En utilisant la définition de l'opérateur Λ_m on a que la somme ci-dessus égale :

$$\begin{aligned} & \sum_{B \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta \tilde{x}) - T_{\tilde{P}}) \\ & \quad \left(\sum_{B \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{P}} (-1)^{d_{\tilde{R}}} \sum_{\eta \in R(\mathbb{F}) \backslash P(\mathbb{F})} \hat{\tau}_{\tilde{R}}^{\tilde{P}}(H_{\tilde{R}}(\eta \delta \tilde{x}) - T_{\tilde{R}}) \phi_{R_E}(\eta \delta x) \right) \\ & = \sum_{B \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in R(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \phi_{R_E}(\delta x) \left(\sum_{\tilde{R} \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{R}}} \hat{\tau}_{\tilde{R}}^{\tilde{P}}(H_{\tilde{R}}(\delta \tilde{x}) - T_{\tilde{R}}) \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta \tilde{x}) - T_{\tilde{P}}) \right). \end{aligned}$$

En vertu du lemme combinatoire de Langlands, la somme entre les parenthèses vaut 0 si $\tilde{R} \neq \tilde{Q}$ et 1 si $\tilde{R} = \tilde{Q}$ d'où le résultat. \square

On va démontrer l'analogie de la proposition 2.3 pour l'opérateur $\Lambda_m^{T, \tilde{Q}}$ suivant :

Proposition 2.5. Soient $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}_0}, B)$, $r_1, r_2 \geq 0$ et $K_0 \subseteq M_{P_E}(\mathbb{A}_f)$ un compact ouvert. Il existe alors un sous-ensemble fini $\{X\}$ de l'algèbre enveloppante de la complexification de l'algèbre de Lie de $(H_{\tilde{P}_E}(\mathbb{F}_\infty) \cap H_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})^1) \times G_{\tilde{P}_E}(\mathbb{F}_\infty)$ (voir (1.20)) tel que pour tout espace

mesurable $(\Omega, d\omega)$, tout $\phi : \Omega \rightarrow C^\infty(P(E) \backslash G_E(\mathbb{A})/K_0)$ mesurable, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tout $x \in \mathfrak{S}_{B \cap M_P}^{MP} \cap (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}))$ on a que l'expression

$$\int_{\Omega} |\Lambda_m^{\tilde{P}, T} \phi(\omega, x)| d\omega$$

où on applique l'opérateur $\Lambda_m^{\tilde{P}, T}$ à la variable x , est majorée par

$$\|x\|^{-r_1} \sum_X \sup_{y \in H_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})} \left(\|y\|^{-r_2} \int_{\Omega} \left| \int_{[N_{P_E}]} R(X) \phi(\omega, ny) dn \right| d\omega \right).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le cas $\tilde{P} = \tilde{G}$, le cas général étant la composition de ce cas et de cas de l'opérateur Λ_{JLR} .

On aura besoin quelques résultats préparatoires avant. Soient D_i , où $i = 1, \dots, n$, les droites dans V stabilisés par M_0 de façon que $V_i := \bigoplus_{j=1}^i D_j$, où $i = 0, 1, \dots, n$, soit stabilisé par B . Pour $i = 0, 1, \dots, n$ soit $e_i^* \in \mathfrak{a}_0^*$ le caractère par lequel A_0 agit sur D_i . Posons aussi $e_j^\vee \in \mathfrak{a}_0^*$ les éléments tels que $e_i^*(e_j^\vee) = \delta_{ij}$ où $i, j = 0, 1, \dots, n$. On pose pour $i = 1, \dots, n$

$$\tilde{\omega}_i^- = \frac{n+1-i}{n+1} \left(\sum_{j=1}^i e_j^* \right) - \frac{i}{n+1} (e_0^* + \sum_{j=i+1}^n e_j^*), \quad \tilde{\omega}_i^+ = \frac{n+1-i}{n+1} (e_0^* + \sum_{j=1}^{i-1} e_j^*) - \frac{i}{n+1} \left(\sum_{j=i}^n e_j^* \right).$$

Alors $\tilde{\omega}_i^-, \tilde{\omega}_i^+ \in (\mathfrak{a}_0^{\tilde{G}})^*$. On pose aussi $\tilde{\omega}_l^- = \tilde{\omega}_l^+ = 0$ pour $l \notin \{1, \dots, n\}$.

Fixons un sous-groupe parabolique relativement standard \tilde{Q} de \tilde{G} . Alors \tilde{Q} est le stabilisateur du drapeau de type

$$0 = V_{i_0} \subsetneq \dots \subsetneq V_{i_{k-1}} \subsetneq V_{i_k} \oplus D_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_{i_l} \oplus D_0 = W$$

où $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} \leq i_k < i_{k+1} < \dots < i_l = n$. Alors

$$\hat{\Delta}_{\tilde{Q}} = \{\tilde{\omega}_{i_a}^-, \tilde{\omega}_{i_b+1}^+ | 1 \leq a \leq k-1, k \leq b \leq l-1\}.$$

Posons $\tilde{\omega}_{\tilde{Q}}^- := \tilde{\omega}_{m_1}^-$ et $\tilde{\omega}_{\tilde{Q}}^+ := \tilde{\omega}_m^+$ où $m_1 = \max(\{j | \tilde{\omega}_j^- \in \hat{\Delta}_{\tilde{Q}}\} \cup \{0\})$ et $m_2 = \min(\{j | \tilde{\omega}_j^+ \in \hat{\Delta}_{\tilde{Q}}\} \cup \{0\})$. Si $\tilde{\omega}_{\tilde{Q}}^- \neq 0$ notons $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^- \in \Delta_{\tilde{Q}}$ la racine simple associée à $\tilde{\omega}_{\tilde{Q}}^-$ comme dans le paragraphe 1.1. Si $\tilde{\omega}_{\tilde{Q}}^- = 0$ on pose $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^- = 0$. On défini

$l\alpha_{\tilde{Q}}^+ \in \Delta_{\tilde{Q}} \cup \{0\}$ de même façon.

On pose aussi pour $i = 1, \dots, n-1$

$$\varpi_i = \frac{n-i}{n} \left(\sum_{j=1}^i e_j^* \right) - \frac{i}{n} \left(\sum_{j=i+1}^n e_j^* \right).$$

Alors $\hat{\Delta}_B = \{\varpi_i | i = 1, \dots, n-1\}$. Pour $l \notin \{1, \dots, n-1\}$ on pose $\varpi_l = 0$.

On définit $\hat{\iota} : \{\tilde{\omega}_i^-, \tilde{\omega}_j^+ | i, j \in \{1, \dots, n\}\} \rightarrow \hat{\Delta}_B \cup \{0\}$ par $\hat{\iota}(\tilde{\omega}_i^-) = \varpi_i$ et $\hat{\iota}(\tilde{\omega}_j^+) = \varpi_{j-1}$ et on note $\hat{\iota}_{\tilde{Q}}$ sa restriction à $\hat{\Delta}_{\tilde{Q}}$. On a alors $\hat{\Delta}_{\tilde{Q}} = \hat{\iota}_{\tilde{Q}}(\hat{\Delta}_{\tilde{Q}}) \setminus \{0\}$. On définit alors $\iota_{\tilde{Q}} : \Delta_{\tilde{Q}} \rightarrow \Delta_Q \cup \{0\}$ de façon suivante. Soient $\tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{Q}}$ et $\tilde{\omega}_{\tilde{\alpha}} \in \hat{\Delta}_{\tilde{Q}}$ le poids associé à $\tilde{\alpha}$ comme dans le paragraphe 1.1. Si $\hat{\iota}_{\tilde{Q}}(\tilde{\omega}_{\tilde{\alpha}}) = 0$ on pose $\iota_{\tilde{Q}}(\tilde{\alpha}) = 0$, sinon, on a $\hat{\iota}_{\tilde{Q}}(\tilde{\omega}_{\tilde{\alpha}}) = \varpi_{\alpha}$ où $\alpha \in \Delta_Q$ et on pose $\iota_{\tilde{Q}}(\tilde{\alpha}) = \alpha$. On vérifie facilement les assertions suivantes :

$\tilde{Q}1)$ Si $\alpha \in \Delta_Q$ est tel que $\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha) = \{\tilde{\alpha}\}$, alors pour tout $H \in \mathfrak{a}_Q^{st}$ on a $\alpha(H) = \tilde{\alpha}(H)$.

$\tilde{Q}2)$ Il existe au plus un $\alpha \in \Delta_Q$ tel que $\#\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha) > 1$. Cela arrive si et seulement si on a $0 < i_{k-1} = i_k < n$ auquel cas il existe un unique $\alpha \in \Delta_Q$, noté $\alpha_{\tilde{Q}}$, tel que $\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha_{\tilde{Q}}) = \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-, \tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+\}$. Dans ce cas $\alpha_{\tilde{Q}}(H) = (\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^- + \tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+)(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{st}$.

$\tilde{Q}3)$ $0 \in \iota_{\tilde{Q}}(\Delta_{\tilde{Q}})$ si et seulement si $i_{k-1} = i_k$ et $i_k \in \{0, n\}$. Dans ce cas, si $i_k = 0$ on a $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+ \in \Delta_{\tilde{Q}}$, $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^- = 0$ et $\iota_{\tilde{Q}}(\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+) = 0$; si $i_k = n$ on a $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^- \in \Delta_{\tilde{Q}}$, $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+ = 0$ et $\iota_{\tilde{Q}}(\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-) = 0$.

On dit que $\tilde{R} \supseteq \tilde{Q}$ est admissible par rapport à \tilde{Q} s'il vérifie $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{R}} = \iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\Delta_Q^R)$. On a donc

- \tilde{G} est admissible par rapport à \tilde{Q} si et seulement si $0 \notin \iota_{\tilde{Q}}(\Delta_{\tilde{Q}})$.
- Si $i_{k-1} \neq i_k$ tout $\tilde{R} \supseteq \tilde{Q}$ est admissible par rapport à \tilde{Q} .
- \tilde{R} n'est pas admissible par rapport à \tilde{Q} si et seulement si $\{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-, \tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+\} \cap \Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{R}}$ est de cardinalité 1.

Lemme 2.6. Soient $\tilde{R} \supseteq \tilde{Q}$ et pour tout $R \supseteq S \supseteq Q$ soit $c_S \in \mathbb{C}$ un scalaire.

1) Supposons que \tilde{R} est admissible par rapport à \tilde{Q} . Dans ce cas

- i) $|\sum_{\tilde{Q} \subseteq \tilde{S} \subseteq \tilde{R}} (-1)^{d_{\tilde{S}}^{\tilde{G}}} c_S| = |\sum_{Q \subseteq S \subseteq R} (-1)^{d_S^G} c_S|$.
- ii) Pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{st}$ on a $\tau_Q^R(H) \geq \tau_{\tilde{Q}}^{\tilde{R}}(H)$.
- iii) Pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{st}$ on a $\sum_{\tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{R}}} \tilde{\alpha}(H) = \sum_{\alpha \in \Delta_Q^R} \alpha(H)$.

2) Si \tilde{R} n'est pas admissible par rapport à \tilde{Q} on a $\sum_{\tilde{Q} \subseteq \tilde{S} \subseteq \tilde{R}} (-1)^{d_{\tilde{S}}^{\tilde{G}}} c_S = 0$.

Démonstration. Démontrons le point 1). Supposons que \tilde{R} est admissible par rapport à \tilde{Q} . Supposons d'abord que pour tout $\alpha \in \Delta_Q$ on a $\#\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha) = 1$. Dans ce cas pour tout $Q \subseteq S \subseteq R$ il existe un unique \tilde{S} entre \tilde{Q} et \tilde{R} tel que $\tilde{S} \cap G = S$. En plus, pour tous \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 entre \tilde{R} et \tilde{Q} on a $d_{\tilde{S}_1} - d_{S_1} = d_{\tilde{S}_2} - d_{S_2}$ et le point i) suit. Les points ii) et iii) découlent facilement du fait que tout $\alpha \in \Delta_Q^R$ vérifie la condition $\tilde{Q}1)$ ci-dessus.

Supposons qu'il existe un $\alpha \in \Delta_Q$ tel que $\#\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha) > 1$. Alors $0 < i_{k-1} = i_k < n$, un tel α est unique et égale $\alpha_{\tilde{Q}}$ et $\iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\alpha_{\tilde{Q}}) = \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-, \tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+\} \subseteq \Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{R}}$. Soit $Q \subseteq S \subseteq R$. Si $\alpha_{\tilde{Q}} \notin \Delta_Q^S$, il existe un unique \tilde{S} entre \tilde{Q} et \tilde{R} tel que $\tilde{S} \cap G = S$ et en plus $d_{\tilde{S}}^{\tilde{G}} = d_S^G$. Si $\alpha_{\tilde{Q}} \in \Delta_Q^S$, soit \tilde{S} tel que $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}} = \iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\Delta_Q^S)$. Alors les sous-groupes \tilde{S}^+ et \tilde{S}^- correspondants à $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}} \setminus \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-\}$ et $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}} \setminus \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+\}$ vérifient $\tilde{S}^- \cap G = \tilde{S}^+ \cap G = \tilde{S} \cap G = S$ et ces sont tous les sous-groupes entre \tilde{Q} et \tilde{R} dont l'intersection avec G vaut S . On a donc $(-1)^{d_{\tilde{S}}^{\tilde{G}}} + (-1)^{d_{\tilde{S}^+}^{\tilde{G}}} + (-1)^{d_{\tilde{S}^-}^{\tilde{G}}} = (-1)^{d_{\tilde{S}^-}^{\tilde{G}}} = (-1)^{d_S^G}$ et le point i) suit. Les points ii) et iii) sont alors évidents car tout $\alpha \in \Delta_Q$ vérifie soit la condition $\tilde{Q}1)$ soit $\tilde{Q}2)$ ci-dessus.

Démontrons le point 2). Dans ce cas il existe un unique $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}} \in \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^-, \tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}^+\} \cap \Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{R}}$. Il vérifie $\iota_{\tilde{Q}}(\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}) \notin \Delta_Q^R$. Soit S entre Q et R . Notons \tilde{S} le sous-groupe parabolique tel que $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}} = \iota_{\tilde{Q}}^{-1}(\Delta_Q^S)$. Alors $\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}} \notin \Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}}$ et si l'on note \tilde{S}_1 le sous-groupe correspondant à $\Delta_{\tilde{Q}}^{\tilde{S}} \cup \{\tilde{\alpha}_{\tilde{Q}}\}$ on a $\tilde{S}_1 \cap G = S$ et \tilde{S} et \tilde{S}_1 sont les seuls sous-groupes paraboliques entre \tilde{Q} et \tilde{R} dont l'intersection avec G vaut S . On a donc $d_{\tilde{S}}^{\tilde{G}} - 1 = d_{\tilde{S}_1}^{\tilde{G}}$ et le résultat suit. \square

On est prêt à démontrer la proposition 2.5. En utilisant le lemme 2.1 on a pour $x \in \mathfrak{S}_B^G$

$$\Lambda_m^T \phi(\omega, x) = \sum_{B \subseteq \tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_2} \sum_{\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} F^{\tilde{1}}(\delta x, T_{\tilde{1}}) \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(\delta x) - T_{\tilde{1}}) \phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \mathbb{E}}(\omega, \delta x)$$

où $\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \mathbb{E}}(\omega, y) = \sum_{\tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{P}_2} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \phi_{P_{\mathbb{E}}}(\omega, y)$. Fixons $\tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_2$. En vertu du lemme 2.6 ci-dessus on a $\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \mathbb{E}} \equiv 0$ sauf si \tilde{P}_2 est admissible par rapport à \tilde{P}_1 donc on suppose que c'est le cas. En utilisant le lemme 2.6 on a donc $|\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \mathbb{E}}| = |\phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}|$ où $\phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, y) := \sum_{P_1 \subseteq P \subseteq P_2} (-1)^{d_P} \phi_{P_{\mathbb{E}}}(\omega, y)$.

Soit $\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})$. Écrivons $\delta x = n_2 n_1^2 a m k$ où $n_2 \in N_2(\mathbb{A})$, $n_1^2 \in N_1^2(\mathbb{A})$ et $k \in K$ appartiennent aux compacts fixés, $a \in A_{\tilde{1}}^{st, \infty}$ et $m \in H_{\tilde{1}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{1}}(\mathbb{A})$ est tel que $F^{\tilde{1}}(m, T_{\tilde{1}}) = 1$. D'après le corollaire 1.5 de [Zyd15a] on a que m appartient à un compact fixé dans $M_1(\mathbb{F}) \backslash M_1(\mathbb{A})$. On a alors

$$\sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(\delta x) - T_{\tilde{1}}) = \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(a) + H_{\tilde{1}}(m) - T_{\tilde{1}}) = \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(a) + T_{\tilde{1}}')$$

pour un $T_{\tilde{1}}' \in \mathfrak{a}_{\tilde{1}}$ dont la norme est majorée par celle de T . En utilisant la définition de la fonction $\sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}$ donnée dans le paragraphe 1.8 et le fait que $n_1^2 \in N_1^2(\mathbb{A})$ on obtient :

$$\phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, \delta x) = \phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, n_2 n_1^2 a m k) = \phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, a a^{-1} n_1^2 a m k) = \phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, a c)$$

où c appartient à un compact fixé de $G(\mathbb{A})$ qui dépend de T

Il est démontré dans [Art80], pages 93-95, qu'il existe un nombre fini des F-sous-groupes N_I de $N_{1, \mathbb{E}}$, et pour tout I il existe un $\beta_I \in (\mathfrak{a}_1^2)^*$ tel que $\beta_I = \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} a_{I, \alpha} \alpha$ où $a_{I, \alpha} > 0$ tels que pour tout $n > 0$ il existe un nombre fini d'éléments X_i de la complexification de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{E}}(\mathbb{F}_{\infty})$ tels que $|\phi_{P_1, \mathbb{E}, P_2, \mathbb{E}}(\omega, a c)|$ est majorée par

$$\sum_{I, i} e^{-n \beta_I(H_1(a))} \int_{[N_I]} |R(X_i) \phi(\omega, u \delta x)| du. \quad (2.1)$$

En vertu du lemme 2.6 point 1) ii) on a $\tau_1^2(H_1(a) - T') = 1$ pour un $T' \in \mathfrak{a}_1$ car $\sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(a) - T_{\tilde{1}}') = 1$ implique $\tau_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(a) - T_{\tilde{1}}') = 1$. Puisque $\tau_1^2(H_1(a) - T') = 1$, il existe des constantes $c'_1, c_1 > 0$ indépendantes de n telles que $-n \beta_I(H_1(a)) \leq c'_1 + -n c_1 (\sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha(H_1(a)))$. En vertu du lemme 2.6 point 1) iii) ci-dessus, on a $\sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha(H_1(a)) = \sum_{\tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{1}}^2} \tilde{\alpha}(H_{\tilde{1}}(a))$. On a $a c = \delta x$. Si l'on note $(\delta x)^1$ la projection de δx à $\tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1$, on voit que puisque $\sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(a) - T_{\tilde{1}}') = 1$, le lemme 1.7 ii) implique que $-n c_1 (\sum_{\tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{1}}^2} \tilde{\alpha}(H_{\tilde{1}}(a))) \leq c'_2 - n c_2 \log(\|(\delta x)^1\|)$ pour des constantes $c'_2, c_2 > 0$ indépendantes de n . En appliquant alors le lemme 1.10 on trouve une constante $c_3 > 0$ indépendante de n telle que $-n \beta_I(H_0(a)) \leq c'_2 - n c_3 \log(\|\delta x\|)$ pour tout I . Puisque $x \in \mathfrak{S}_B^G$, il existe finalement une constante $c_4 > 0$ telle que $\|\delta x\| \geq c_4 \|x\|$, cela montre que pour tous $t_1 \in [0, 1]$, I et i on a que l'intégrale sur Ω de l'expression (2.1) est majorée par

$$\sum_{I, i} \int_{\Omega} \int_{[N_I]} |R(X_i) \phi(u \delta x)| \|u \delta x\|^{-n c_3 (1-t_1)} du d\omega \|x\|^{-n c_4 t_1} \leq c_5 \|x\|^{-n c_4 t_1} \sum_i \sup_{y \in G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})} \int_{\Omega} |R(X_i) \phi(\omega, y)| \|y\|^{-n c_3 (1-t_1)} d\omega$$

pour un $c_5 > 0$. D'autre côté, en vertu du lemme 1.8 i) on a $\sum_{\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} F^{\tilde{1}}(\delta x, T_{\tilde{1}}) \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(\delta x) - T_{\tilde{1}}) \leq c_6 \|x\|^N$ où N ne dépend pas de T . En prenant alors n suffisamment grand et t_1 adapté on conclut la preuve. \square

2.4 Opérateur de troncature diagonal

Soient $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}}, B)$ et ϕ une fonction localement intégrable sur $(Q(\mathbb{F}) \times \tilde{Q}(\mathbb{F})) \backslash (G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A}))$. On pose pour $x \in N_Q(\mathbb{A})M_Q(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A})$, $\tilde{x} \in N_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})M_{\tilde{Q}}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$

$$\Lambda_d^{\tilde{Q}, T} \phi(x, \tilde{x}) = \sum_{B \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta \tilde{x}) - T) \phi_{P \times \tilde{P}}(\delta x, \delta \tilde{x}).$$

On a la propriété d'inversion :

Lemme 2.7. Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}}, B)$. Alors pour tous $x \in G(\mathbb{A})$, $\tilde{x} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$ on a

$$\phi_{Q \times \tilde{Q}}(x, \tilde{x}) = \sum_{B \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta \tilde{x}) - T_{\tilde{P}}) \Lambda_d^{\tilde{P}, T} \phi(\delta x, \delta \tilde{x}).$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme 2.4 ci-dessus. \square

Proposition 2.8. Soient $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{P}}, B)$, $r_1, r_2 \geq 0$ et $K_0 \subseteq (M_P \times M_{\tilde{P}})(\mathbb{A}_f)$ un compact ouvert. Il existe alors un sous-ensemble fini $\{X\}$ de l'algèbre enveloppante de la complexification de l'algèbre de Lie de

$$(H_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}) \cap H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1) \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}) \times (H_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}) \cap H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1) \times \tilde{G}_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty})$$

(voir (1.20)) tel que pour tout espace mesurable $(\Omega, d\omega)$, tout

$$\phi : \Omega \rightarrow C^{\infty}((P(\mathbb{F}) \times \tilde{P}(\mathbb{F})) \backslash (G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A}))/K_0)$$

mesurable, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tout

$$x \in \mathfrak{S}_{B \cap M_P}^{M_P} \cap (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}))$$

on a que l'expression

$$\int_{\Omega} |\Lambda_d^{\tilde{P}, T} \phi(\omega, x, x)| d\omega$$

où on applique l'opérateur $\Lambda_d^{\tilde{P}, T}$ à la fonction $\phi(\omega, (\cdot, \cdot))$ et on met comme argument $(x, x) \in (P(\mathbb{F}) \times P(\mathbb{F})) \backslash (G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})) \subseteq (P(\mathbb{F}) \times \tilde{P}(\mathbb{F})) \backslash (G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A}))$, est majorée par

$$\|x\|^{-r_1} \sum_X \sup_{\substack{y \in H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}), \\ \tilde{y} \in H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})}} \left(\|y\|^{-r_2} \|\tilde{y}\|^{-r_2} \int_{\Omega} \left| \int_{[N_P]} \int_{[N_{\tilde{P}}]} R(X) \phi(\omega, ny, \tilde{n}\tilde{y}) dndn \right| d\omega \right).$$

Démonstration. On suit de près l'argument de [Art80], pages 92-95.

En utilisant le lemme 2.1 pour $G \hookrightarrow \tilde{G}$ (il est valable bien sûr dans ce cas aussi), on a pour pour $x \in \mathfrak{S}_{B \cap M_P}^{M_P} \cap (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}))$

$$\Lambda_d^{\tilde{P}, T} \phi(x, x) = \sum_{B \subseteq \tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}} \sum_{\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash P(\mathbb{F})} F^{\tilde{1}}(\delta x, T_{\tilde{1}}) \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(\delta x) - T_{\tilde{1}}) \phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\delta x)$$

où

$$\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(y) = \sum_{\tilde{P}_1 \subseteq \tilde{Q} \subseteq \tilde{P}_2} (-1)^{d_{\tilde{Q}}} \phi_{Q \times \tilde{Q}}(\omega, y, y) \quad (2.2)$$

Soit $\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash P(\mathbb{F})$. Selon les décompositions données dans le paragraphe 1.9, écrivons $\delta x = n_2^P n_1^2 amk$ où $n_2^P \in N_2^P(\mathbb{A})$, $n_1^2 \in N_1^2(\mathbb{A})$ et $k \in K \cap M_P(\mathbb{A})$ appartiennent aux compacts fixés,

$a \in A_1^{st, \tilde{P}, \infty} := A_1^{st, \infty} \cap (H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}))$ et $m \in H_{\tilde{\Gamma}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{\Gamma}}(\mathbb{A})$ est tel que $F^{\tilde{1}}(m, T_{\tilde{\Gamma}}) = 1$. D'après le corollaire 1.5 de [Zyd15a] on a que m appartient à un compact fixé dans $M_1(\mathbb{F}) \backslash M_1(\mathbb{A})$. On a alors

$$\sigma_1^{\tilde{2}}(H_{\tilde{\Gamma}}(\delta x) - T_{\tilde{\Gamma}}) = \sigma_1^{\tilde{2}}(H_{\tilde{\Gamma}}(a) + H_{\tilde{\Gamma}}(m) - T_{\tilde{\Gamma}}) = \sigma_1^{\tilde{2}}(H_{\tilde{\Gamma}}(a) + T_1')$$

pour un $T_1' \in \mathfrak{a}_{\tilde{\Gamma}}$ dont la norme est majorée par celle de T . En utilisant le fait que $n_1^2 \in N_1^{\tilde{2}}(\mathbb{A})$ on voit donc que

$$\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, \delta x) = \phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, n_2^P n_1^2 m a k) = \phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, a a^{-1} n_1^2 a m k) = \phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, a c)$$

où c appartient à un compact fixé de $M_P(\mathbb{A})$ qui dépend de T .

Au début de la preuve de la proposition 2.5 nous avons introduit une application $\iota_{\tilde{Q}} : \Delta_{\tilde{Q}} \rightarrow \Delta_Q \cup \{0\}$ pour tout $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$. Notons alors $\iota_1^{\tilde{2}} : \Delta_1^{\tilde{2}} \rightarrow \Delta_1^2 \cup \{0\}$ l'application suivante : pour tout $\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}$ on pose $\iota_1^{\tilde{2}}(\tilde{\alpha}) = \iota_1(\tilde{\alpha})$ si $\iota_1(\tilde{\alpha}) \in \Delta_1^2$, sinon on pose $\iota_1^{\tilde{2}}(\tilde{\alpha}) = 0$. Pour tout $\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}$ (resp. $\alpha \in \Delta_1^2$) soit $N_{\tilde{\alpha}}$ (resp. N_{α}) la partie unipotente du sous-groupe de \tilde{P}_1 (resp. P_1) associé à $\Delta_1^{\tilde{2}} \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ (resp. $\Delta_1^2 \setminus \{\alpha\}$).

Notons $\mathfrak{a}_{\tilde{\Gamma}}^{st, \tilde{P}}$ l'image de $A_{\tilde{\Gamma}}^{st, \tilde{P}, \infty}$ par l'application $H_{\tilde{P}}$ définie dans le paragraphe 1.1. On a alors

- P1) Pour tout $\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}$ on a $\iota_1^{\tilde{2}}(\tilde{\alpha}) = 0$ si et seulement si $N_{\tilde{\alpha}} \cap N_1 = N_2$.
- P2) Pour tout $\alpha \in \Delta_1^2$, l'ensemble $(\iota_1^{\tilde{2}})^{-1}(\{\alpha\})$ n'est pas vide et pour tout $\tilde{\alpha} \in (\iota_1^{\tilde{2}})^{-1}(\{\alpha\})$ on a $N_{\tilde{\alpha}} \cap G = N_{\alpha}$.
- P3) Il existe au plus un $\alpha \in \Delta_1^2$ tel que $\#(\iota_1^{\tilde{2}})^{-1}(\{\alpha\}) > 1$. Si c'est le cas, on a, avec la notation de la preuve de la proposition 2.5, $(\iota_1^{\tilde{2}})^{-1}(\{\alpha\}) = \{\tilde{\alpha}_1^-, \tilde{\alpha}_1^+\}$ et pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{\Gamma}}^{st, \tilde{P}}$ on a $\alpha(H) = (\tilde{\alpha}_1^- + \tilde{\alpha}_1^+)(H)$.
- P4) Si $\alpha \in \Delta_1^2$ est tel que $(\iota_1^{\tilde{2}})^{-1}(\{\alpha\}) = \{\tilde{\alpha}\}$ on a $\alpha(H) = \tilde{\alpha}(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{\Gamma}}^{st, \tilde{P}}$.

Pour des $\tilde{R}, \tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ tels que $\tilde{R} \subseteq \tilde{Q} \subseteq \tilde{P}$ on note $\mathfrak{n}_{\tilde{R}} = \text{Lie} N_{\tilde{R}}$, $\mathfrak{n}_{\tilde{R}}^{\tilde{Q}} = \text{Lie} N_{\tilde{R}}^{\tilde{Q}}$, $\mathfrak{n}_R = \text{Lie} N_R$ etc. Pour un F-groupe algébrique H on note aussi $H_{\mathbb{Q}} = \text{Res}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}} H$.

Soit $\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}$. Posons $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}} = \text{Lie} N_{\tilde{\alpha}}$, $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{2}} = \mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}} \cap \mathfrak{n}_1^{\tilde{2}}$ et soient $n_{\tilde{\alpha}}$ et $m_{\tilde{\alpha}}$ les dimensions sur \mathbb{Q} de $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}^{\tilde{2}}(\mathbb{Q})$ et de $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}^{\tilde{2}}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{n}_{1, \mathbb{Q}}^2(\mathbb{Q})$ respectivement, où $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}^{\tilde{2}} := (\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{2}})_{\mathbb{Q}}$ etc. Fixons $\{Y_{\tilde{\alpha}, 1}, \dots, Y_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}}\}$ une \mathbb{Q} -base de $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}^{\tilde{2}}(\mathbb{Q})$ ainsi que $\{X_{\tilde{\alpha}, 1}, \dots, X_{\tilde{\alpha}, m_{\tilde{\alpha}}}\}$ une \mathbb{Q} -base de $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}^{\tilde{2}}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{n}_{1, \mathbb{Q}}^2(\mathbb{Q})$. On suppose que tout $Y_{\tilde{\alpha}, i}$ (resp. $X_{\tilde{\alpha}, j}$) est un vecteur propre de la racine $\beta_{\tilde{\alpha}, i}$ (resp. $\gamma_{\tilde{\alpha}, j}$) pour l'action de $A_{\tilde{\Gamma}}$ sur $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{2}}$ (resp. de A_1 sur \mathfrak{n}_1^2). On suppose aussi que, pour $k \leq l$, la hauteur de $\beta_{\tilde{\alpha}, k}$ (resp. de $\gamma_{\tilde{\alpha}, k}$) est plus grande que celle de $\beta_{\tilde{\alpha}, l}$ (resp. de $\gamma_{\tilde{\alpha}, l}$).

Soit alors $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, i}$, pour $0 \leq i \leq n_{\tilde{\alpha}}$, la \mathbb{Q} -algèbre de Lie engendré par les $\{Y_{\tilde{\alpha}, 1}, \dots, Y_{\tilde{\alpha}, i}\}$ et $\mathfrak{n}_{2, \mathbb{Q}} \times \mathfrak{n}_{\tilde{2}, \mathbb{Q}}$. On a donc $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}} = \mathfrak{n}_{2, \mathbb{Q}} \times \mathfrak{n}_{\tilde{2}, \mathbb{Q}}$. Notons aussi, pour $0 \leq j \leq m_{\tilde{\alpha}}$, $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}} + j}$ la somme directe de l'algèbre engendré par les $\{X_{\tilde{\alpha}, 1}, \dots, X_{\tilde{\alpha}, j}\}$ avec $\mathfrak{n}_{2, \mathbb{Q}} \times \mathfrak{n}_{\tilde{2}, \mathbb{Q}}$. On a donc $\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}} + m_{\tilde{\alpha}}} = (\mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}} \cap \mathfrak{n}_{\tilde{\Gamma}, \mathbb{Q}}) \times \mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}$. Soit $\exp : \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow N_1 \times N_{\tilde{\Gamma}}$ un isomorphisme $A_1 \times A_{\tilde{\Gamma}}$ équivariant. On note donc aussi $N_{\tilde{\alpha}, k} = \exp \mathfrak{n}_{\tilde{\alpha}, k}$ où $0 \leq k \leq n_{\tilde{\alpha}} + m_{\tilde{\alpha}}$. C'est un \mathbb{Q} -sous-groupe normal de $N_{1, \mathbb{Q}} \times N_{\tilde{\Gamma}, \mathbb{Q}}$.

Pour un \mathbb{Q} -sous-groupe N de $N_{1, \mathbb{Q}} \times N_{\tilde{\Gamma}, \mathbb{Q}}$ on définit $\pi(N)$ l'opérateur qui appliqué à une fonction ϕ sur $G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A})$ donne

$$G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A}) \ni y \mapsto \int_{[N]_{\mathbb{Q}}} \phi(ny) dn$$

où l'on note $[N]_{\mathbb{Q}} = N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ où $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ c'est l'anneau des adèles de \mathbb{Q} . On a donc que $\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, \cdot)$ donné par (2.2) ci-dessus s'obtient, à un signe près, par application de l'opérateur

$$\prod_{\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}} (\pi(N_{2, \mathbb{Q}} \times N_{\tilde{2}, \mathbb{Q}}) - \pi((N_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}} \cap N_1) \times N_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}}))$$

à $\phi(\omega, \cdot)$. Or, on a pour $\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}$ que $\pi(N_{2, \mathbb{Q}} \times N_{\tilde{2}, \mathbb{Q}}) - \pi((N_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}} \cap N_1) \times N_{\tilde{\alpha}, \mathbb{Q}})$ égale

$$\sum_{i=1}^{n_{\tilde{\alpha}}} (\pi(N_{\tilde{\alpha}, i-1}) - \pi(N_{\tilde{\alpha}, i})) + \sum_{j=1}^{m_{\tilde{\alpha}}} (\pi(N_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}+j-1}) - \pi(N_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}+j})).$$

Soient $\mathcal{S}_{\tilde{1}}, \mathcal{S}_1 \subseteq \Delta_1^{\tilde{2}}$ tels que $\mathcal{S}_{\tilde{1}} \sqcup \mathcal{S}_1 = \Delta_1^{\tilde{2}}$ et $\iota_1^{\tilde{2}}(\mathcal{S}_1) \subseteq \Delta_1^2$. Pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}$ on choisit un $i_{\tilde{\alpha}}$ entre 1 et $n_{\tilde{\alpha}}$ et on construit l'ensemble $I_{\tilde{1}} = \{i_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}}$. De même, pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1$ on choisit un $j_{\tilde{\alpha}}$ entre 1 et $m_{\tilde{\alpha}}$ et on construit $I_1 = \{j_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1}$. Pour ces données choisies, on pose

$$\begin{aligned} N_{I_{\tilde{1}}} &= \prod_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}} N_{\tilde{\alpha}, i_{\tilde{\alpha}}} \cap N_{\tilde{1}}, & N_{I_1} &= \prod_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1} N_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}+j_{\tilde{\alpha}}} \cap N_1, \\ N_{\tilde{I}_{\tilde{1}}} &= \prod_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}} N_{\tilde{\alpha}, i_{\tilde{\alpha}}-1} \cap N_{\tilde{1}}, & N_{\tilde{I}_1} &= \prod_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1} N_{\tilde{\alpha}, n_{\tilde{\alpha}}+j_{\tilde{\alpha}}-1} \cap N_1, \end{aligned}$$

ainsi que $\mathbf{n}^{I_{\tilde{1}}}$ (resp. \mathbf{n}^{I_1}) l'espace engendré par $\{Y_{\tilde{\alpha}, i_{\tilde{\alpha}}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}}$ (resp. $\{X_{\tilde{\alpha}, j_{\tilde{\alpha}}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1}$). Fixons une base de $\mathbf{n}^{I_{\tilde{1}}}(\mathbb{Q})$ (resp. de $\mathbf{n}^{I_1}(\mathbb{Q})$) parmi les éléments de $\{Y_{\tilde{\alpha}, i_{\tilde{\alpha}}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}}$ (resp. de $\{X_{\tilde{\alpha}, j_{\tilde{\alpha}}}\}_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1}$). On note aussi $\mathbf{n}^{I_{\tilde{1}}}(\mathbb{Q})'$ (resp. $\mathbf{n}^{I_1}(\mathbb{Q})'$) le sous-ensemble de $\mathbf{n}^{I_{\tilde{1}}}(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathbf{n}^{I_1}(\mathbb{Q})$) composé d'éléments dont toutes les coordonnées dans la base choisie sont non-nulles.

Soit $\psi : \mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère continu non-trivial. En utilisant la formule d'inversion de Fourier, on voit que $\phi_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(\omega, y)$ égale la somme sur tous les choix des $\mathcal{S}_{\tilde{1}}, \mathcal{S}_1, I_{\tilde{1}}, I_1$ comme ci-dessus, de

$$\sum_{\eta \in \mathbf{n}^{I_1}(\mathbb{Q})'} \sum_{\xi \in \mathbf{n}^{I_{\tilde{1}}}(\mathbb{Q})'} \int_{[n^{I_1}]_{\mathbb{Q}}} \int_{[n^{I_{\tilde{1}}}]_{\mathbb{Q}}} \int_{[N_{\tilde{I}_1}]_{\mathbb{Q}}} \int_{[N_{\tilde{I}_{\tilde{1}}}]_{\mathbb{Q}}} \phi(\omega, n \exp(X)y, \tilde{n} \exp(\tilde{X})y) \psi(\langle X, \eta \rangle) \psi(\langle \tilde{X}, \xi \rangle) d\tilde{n} dn d\tilde{X} dX$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ c'est le produit scalaire défini par les bases respectives.

On met $y = ac$ comme avant. En raisonnant maintenant comme dans les pages 94-95 de [Art80] on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, il existe une constante C qui ne dépend que de n, T et du compact ouvert K_0 ainsi qu'un nombre fini $\{Y_j\}, \{X_i\}$ des éléments des algèbres enveloppantes des complexifications des algèbres de Lie de $((H_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}) \cap H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1) \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}))$ et $(H_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty}) \cap H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1) \times \tilde{G}_{\tilde{P}}(\mathbb{F}_{\infty})$ respectivement tel que l'expression ci-dessus, quand $y = ac$, est majorée par

$$C \sum_{i,j} \int_{[N_{I_1}^P]_{\mathbb{Q}}} \int_{[N_{I_{\tilde{1}}}^{\tilde{P}}]_{\mathbb{Q}}} \left| \int_{[N_P]} \int_{[N_{\tilde{P}}]} R_2(Y_j) R_3(X_i) \phi(\omega, n_P n_{I_1}^P ac, n_{\tilde{P}} n_{I_{\tilde{1}}}^{\tilde{P}} ac) dn_{\tilde{P}} dn_P \right| dn_{I_1}^{\tilde{P}} dn_{I_1}^P$$

fois e à la puissance

$$-n \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_{\tilde{1}}} \beta_{\tilde{\alpha}, i_{\tilde{\alpha}}}(H_{\tilde{1}}(a)) - n \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_1} \gamma_{\tilde{\alpha}, j_{\tilde{\alpha}}}(H_1(a)).$$

En utilisant la définition de l'ensemble $\mathcal{S}_1 \subseteq \Delta_1^{\tilde{2}}$ et ensuite les propriétés P3) et P4) ci-dessus il résulte du fait que $\mathcal{S}_{\tilde{1}} \sqcup \mathcal{S}_1 = \Delta_1^{\tilde{2}}$ que la somme ci-dessus égale $-n \sum_{\tilde{\alpha} \in \Delta_1^{\tilde{2}}} c_{\tilde{\alpha}} \tilde{\alpha}(H_{\tilde{1}}(a))$ pour certains $c_{\tilde{\alpha}} > 0$ qui ne dépendent que de $\mathcal{S}_{\tilde{1}}, \mathcal{S}_1, I_{\tilde{1}}$ et I_1 . En raisonnant donc maintenant de

façon analogue comme dans la preuve de la proposition 2.5 après l'équation (2.1), en s'appuyant sur les lemmes 1.7 ii), 1.8 i) et 1.10 on trouve que pour tout $r_1, r_2 > 0$ il existe des constantes $C', C'' > 0$ telles que pour $\mathcal{F}(M_0, B) \ni \tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}$ fixés on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \sum_{\delta \in P_1(\mathbb{F}) \backslash P(\mathbb{F})} F^{\tilde{1}}(\delta x, T_{\tilde{1}}) \sigma_{\tilde{1}}^{\tilde{2}}(H_{\tilde{1}}(\delta x) - T_{\tilde{1}}) \sum_{\tilde{P}_1 \subseteq \tilde{Q} \subseteq \tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}} (-1)^{d_{\tilde{Q}}} \phi_{Q \times \tilde{Q}}(\omega, \delta x, \delta x) \right| d\omega \leq C' \sum_{S_{\tilde{1}}, S_1} \sum_{I_{\tilde{1}}, I_1} \sum_{i,j} \|x\|^{-r_1} \\ & \int_{\Omega} \int_{[N_{I_{\tilde{1}}}^P]_{\mathbb{Q}}} \int_{[N_{I_1}^{\tilde{P}}]_{\mathbb{Q}}} \left| \int_{[N_P]} \int_{[N_{\tilde{P}}]} R_2(Y_j) R_3(X_i) \phi(\omega, n n_{I_1}^P \delta x, \tilde{n} n_{I_{\tilde{1}}}^{\tilde{P}} \delta x) d\tilde{n} dn \right| \|n_{I_{\tilde{1}}}^{\tilde{P}} \delta x\|^{-r_2} \|n_{I_1}^P \delta x\|^{-r_2} dn_{I_{\tilde{1}}}^{\tilde{P}} dn_{I_1}^P \\ & d\omega \leq C'' \|x\|^{-r_1} \sum_{i,j} \sup_{\substack{y \in H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{P}}(\mathbb{A}), \\ \tilde{y} \in H_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})}} \left(\int_{\Omega} \left| \int_{[N_P]} \int_{[N_{\tilde{P}}]} R_2(X_j) R_3(Y_i) \phi(\omega, n y, \tilde{n} \tilde{y}) d\tilde{n} dn \right| \|y\|^{-r_2} \|\tilde{y}\|^{-r_2} d\omega \right). \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Dans le cas de l'inclusion $U \hookrightarrow \tilde{U}$ on introduit aussi l'opérateur de troncature diagonal. Soient $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ et ϕ une fonction localement intégrable sur $(Q(\mathbb{F}) \times \tilde{Q}(\mathbb{F})) \backslash (U(\mathbb{A}) \times \tilde{U}(\mathbb{A}))$. On pose pour $x \in N_Q(\mathbb{A}) M_Q(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A})$, $\tilde{x} \in N_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) M_{\tilde{Q}}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_0$

$$\Lambda_d^{Q,T} \phi(x, \tilde{x}) = \sum_{P_0 \subseteq P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T) \phi_{P \times \tilde{P}}(\delta x, \delta \tilde{x}).$$

Les analogues évidents du lemme 2.7 et de la proposition 2.8 sont alors aussi vrais dans le cas de groupes unitaires.

3 Le côté spectral de la formule des traces pour les groupes linéaires

Pour l'un des opérateurs Λ discutés dans la section 2 et une fonction Ψ de plusieurs variables, par $\Lambda_n \Psi$ on entend que l'on applique Λ à la n -ième variable considérant les autres variables fixés. Dans le cas de l'opérateur Λ_d introduit dans le paragraphe 2.4, on écrira $\Lambda_{d,12} \Psi$ pour signifier que l'on l'applique aux premières 2 variables etc.

3.1 Convergence du noyau spectral tronqué

Soit $\det \in \mathfrak{a}_0^*$ le déterminant de \tilde{G} pour son action sur W . On a alors $2 \det \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\tilde{G}_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}_m)$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$ et tout $s \in \mathbb{C}$ on définit

$$|\det \tilde{x}|_{\mathbb{A}}^s := e^{s \det H_{\tilde{G}}(\tilde{x})}.$$

Soit $\Phi \in C_c((G_{\mathbb{E}} \times \tilde{G}_{\mathbb{E}})(\mathbb{A}))$ et soit $k = k_{\Phi}$ son noyau automorphe. Pour $\chi \in \mathcal{X}^{G_{\mathbb{E}} \times \tilde{G}_{\mathbb{E}}}$, $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0, B)$ un sous-groupe parabolique relativement standard de \tilde{G} , $x, y \in N_{P_{\mathbb{E}}}(\mathbb{A}) M_P(\mathbb{E}) \backslash G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$ et $\tilde{x}, \tilde{y} \in N_{\tilde{P}_{\mathbb{E}}}(\mathbb{A}) M_{\tilde{P}}(\mathbb{E}) \backslash \tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$ on pose

$$k_{\tilde{P}, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = k_{\Phi, \tilde{P}, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) := k_{\Phi, P_{\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{\mathbb{E}}, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}),$$

où on utilise la convention du paragraphe 1.1 qu'à $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0, B)$ on associe $P := \tilde{P} \cap G \in \mathcal{F}(B)$.

Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ et $(x, \tilde{x}), (y, \tilde{y}) \in (G_{\mathbb{E}} \times \tilde{G}_{\mathbb{E}})(\mathbb{A})$ on pose

$$k_{\chi}^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = k_{\Phi, \chi}^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = \sum_{\substack{\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0, B) \\ \delta_1 \in P(\mathbb{E}) \backslash G(\mathbb{E}) \\ \delta_2 \in P(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F}) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{F})}} (-1)^{d_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}} \sum \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 y) - T_{\tilde{P}}) k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 \tilde{x}, \delta_2 y, \delta_3 \tilde{y}). \quad (3.1)$$

Théorème 3.1. *Pour tout $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$, tous $\sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ et tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}} \int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} |k_\chi^T(g, g, h, \tilde{h})| |\det g|_\mathbb{A}^\sigma |\det h|_\mathbb{A}^{\sigma'} d\tilde{h} dh dg < \infty. \quad (3.2)$$

Démonstration. La preuve suivra la route tracée par la preuve du théorème 2.1 de [Art80].

Soient $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$, $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$, $g \in G_E(\mathbb{A})$, $h \in G(\mathbb{A})$ et $\tilde{h} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$ tels que $k_{\Phi, \tilde{P}, \chi}(g, g, h, \tilde{h})$ est non nul. En vertu du lemme 1.5, il existe des $m \in M_{P_E}(\mathbb{A})^1$ et $\tilde{m} \in M_{\tilde{P}}(\mathbb{A})^1$ tels que $k_{\Phi, \tilde{P}}(g, \tilde{m}g, mh, \tilde{h}) \neq 0$. Il existe alors $\gamma \in M_P(E)$, $\tilde{\gamma} \in M_{\tilde{P}}(E)$, $n \in N_{P_E}(\mathbb{A})$ et $\tilde{n} \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ tels que $g^{-1}n\gamma mh$ et $\tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{\gamma}\tilde{m}g$ appartient à un compact de $\tilde{G}_E(\mathbb{A}) \supseteq G_E(\mathbb{A})$ fixé qui ne dépend que du support de Φ . Puisque $M_{P_E}(\mathbb{A})^1 \subseteq M_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})^1$, $N_{P_E} \subseteq N_{\tilde{P}_E}$, $P_E \subseteq \tilde{P}_E$ et $K_E \subseteq \tilde{K}_E$, l'argument entre les équations (2.2) et (2.3) de [Art80], pages 100-101, montre qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ qui ne dépend que du compact à lequel appartient $g^{-1}n\gamma mh$ telle que

$$\varpi(H_{\tilde{P}}(g)) \geq C + \varpi(H_{\tilde{P}}(h)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{P}}.$$

Par le même argument appliqué à $\tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{\gamma}\tilde{m}g$ on trouve une constante C' telle que

$$\varpi(H_{\tilde{P}}(\tilde{h})) \geq C' + \varpi(H_{\tilde{P}}(g)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{P}}.$$

On voit alors qu'il existe des $T'_\Phi, T''_\Phi \in \mathfrak{a}_0$, qui ne dépendent que du support de Φ tels que si l'on met $T' = T + T'_\Phi$ et $T'' = T + T''_\Phi$ on a que $k_\chi^T(g, g, h, \tilde{h})$ égale

$$\sum_{\substack{\tilde{P} \\ \delta_1 \in P(E) \backslash G(E) \\ \delta_2 \in P(F) \backslash G(F) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(F) \backslash \tilde{G}(F)}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h) - T_{\tilde{P}}') \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_1 g) - T_{\tilde{P}}') \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_3 \tilde{h}) - T_{\tilde{P}}'') k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 g, \delta_1 g, \delta_2 h, \delta_3 \tilde{h}).$$

En particulier, en vertu du lemme 1.8 ii) les sommes dans la définition de $k_{\Phi, \chi}^T(g, g, h, \tilde{h})$, où $g \in [G_E]$, $h \in [G]$ et $\tilde{h} \in [\tilde{G}]$, sont finies et la fonction est bien définie.

Les fonctions $(g, \tilde{g}) \mapsto k_{\tilde{P}, \chi}(g, \tilde{g}, \cdot, \cdot)$ et $g \mapsto k_{\tilde{P}, \chi}(\cdot, \cdot, g, \cdot)$ égalent leur termes constants le long de $P_E \times \tilde{P}_E$ et P_E respectivement. Pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$, en utilisant le lemme 2.7 pour l'opérateur $\Lambda_{d, 12}^{\tilde{P}, T'}$ (sa version sur E , i.e. pour les fonctions définies sur $(G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A})$) ainsi que le lemme 2.4 pour l'opérateur $\Lambda_{m, 3}^{\tilde{P}, T}$ et ensuite le lemme 1.7 i) on trouve que k_χ^T égale la somme sur les sous-groupes paraboliques relativement standards $\tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_4$ et $\tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}_5$ de \tilde{G} de

$$\sum_{\substack{\delta_1 \in P_1(E) \backslash G(E) \\ \delta_2 \in P_2(F) \backslash G(F)}} \sigma_1^{\tilde{A}}(H_{\tilde{1}}(\delta_1 g) - T_{\tilde{1}}') \sigma_2^{\tilde{B}}(H_{\tilde{2}}(\delta_2 h) - T_{\tilde{2}}) \Lambda_{d, 12}^{\tilde{P}_1, T'} \Lambda_{m, 3}^{\tilde{P}_2, T} \left(\sum_{\tilde{Q}'_1 \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}'_2} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\delta_3 \in \tilde{P}(F) \backslash \tilde{G}(F)} \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_3 \tilde{h}) - T_{\tilde{P}}'') k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 g, \delta_1 g, \delta_2 h, \delta_3 \tilde{h}) \right)$$

où \tilde{Q}'_1 c'est le plus petit sous-groupe parabolique de \tilde{G} contenant $\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2$ et $\tilde{Q}'_2 = \tilde{P}_4 \cap \tilde{P}_5$. On considère ces sous-groupes fixés désormais. Soit \tilde{P} entre \tilde{Q}'_1 et \tilde{Q}'_2 . La fonction $\tilde{G}_E(\mathbb{A}) \ni \tilde{y} \mapsto k_{\tilde{P}, \chi}(\cdot, \cdot, \cdot, \tilde{y})$ égale son terme constant le long de \tilde{P}_E . On choisit alors un sous-groupe de Borel $\tilde{B} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ contenu dans \tilde{P}_1 et on applique le lemme 2.2 pour l'opérateur $\Lambda_{JLR, 4}^{\tilde{P}, T''}$ et le sous-groupe de Borel \tilde{B} de \tilde{G} et l'on ré-applique le lemme 1.7 i) et l'on trouve que l'intégrale (3.2) est

majorée par la somme sur les sous-groupes paraboliques relativement standards $\tilde{B} \subseteq \tilde{P}_1 \subseteq \tilde{P}_4$, $\tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}_5$ et $\tilde{B} \subseteq \tilde{P}_3 \subseteq \tilde{P}_6$ de \tilde{G} de

$$\sum_{\chi} \int_{P_1(\mathbb{E}) \backslash G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})} \int_{P_2(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A})} \int_{\tilde{P}_3(\mathbb{F}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})} \sigma_1^4(H_1(g) - T_1') \sigma_2^5(H_2(h) - T_2) \sigma_3^6(H_3(\tilde{h}) - T_3'') \\ |\Lambda_{d,12}^{\tilde{P}_1, T'} \Lambda_{m,3}^{\tilde{P}_2, T} \Lambda_{JLR,4}^{\tilde{P}_3, T''} (\sum_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}_2} (-1)^{d_{\tilde{P}}} k_{\chi, \tilde{P}}(g, g, h, \tilde{h}))| |\det g|_{\mathbb{A}}^{\sigma} |\det h|_{\mathbb{A}}^{\sigma'} d\tilde{h} dh dg \quad (3.3)$$

où \tilde{Q}_1 c'est le plus petit sous-groupe parabolique de \tilde{G} contenant $\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2 \cup \tilde{P}_3$ et $\tilde{Q}_2 = \tilde{P}_4 \cap \tilde{P}_5 \cap \tilde{P}_6$.

Soient $x, g \in G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$, $h \in G(\mathbb{A})$ et $\tilde{y} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$. On a $\Lambda_{d,12}^{\tilde{P}_1, T'} \Lambda_{m,3}^{\tilde{P}_2, T} k_{\tilde{P}, \chi}(x, g, h, \tilde{y}) = \Lambda_{d,12}^{\tilde{P}_1, T'} \Lambda_{m,3}^{\tilde{P}_2, T} \int_{[N_{1,\mathbb{E}}]} \int_{[N_{2,\mathbb{E}}]} k_{P_{\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{\mathbb{E}, \chi}}(x, n_1 g, n_2 h, \tilde{y}) dn_2 dn_1$. Pour tout \tilde{P} entre \tilde{Q}_1 et \tilde{Q}_2 , en utilisant le corollaire 1.9 et la décomposition de Bruhat, on a

$$\int_{[N_{1,\mathbb{E}}]} \int_{[N_{2,\mathbb{E}}]} k_{P_{\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{\mathbb{E}, \chi}}(x, n_1 g, n_2 h, \tilde{y}) dn_2 dn_1 = \sum_{\substack{s \in \Omega^1 \backslash \Omega^P / \Omega^2 \\ \tilde{s} \in \Omega^{\tilde{3}} \backslash \Omega^{\tilde{P}} / \Omega^{\tilde{1}}}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(\mathbb{E}) \backslash P_1(\mathbb{E}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(\mathbb{E}) \backslash \tilde{P}_3(\mathbb{E})}} k_{P_{2,\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{1,\mathbb{E}, \chi}}(w_s^{-1} \gamma x, g, h, w_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{y}).$$

Posons

$$(\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' = \Omega^{\tilde{P}} \setminus \bigcup_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{R} \subsetneq \tilde{P}} \Omega^{\tilde{R}}$$

et $(\Omega_{\tilde{Q}_1, G}^{\tilde{P}})' = (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' \cap \Omega^G$. Alors $(\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})'$ (resp. $(\Omega_{\tilde{Q}_1, G}^{\tilde{P}})'$) est $\Omega^{\tilde{3}}$ -stable (resp. Ω^1 -stable) à gauche et $\Omega^{\tilde{1}}$ -stable (resp. Ω^2 -stable) à droite. On a alors les décompositions en parties disjointes suivantes

$$\Omega^{\tilde{P}} = \coprod_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{P}} (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' \quad \Omega^P = \coprod_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{P}} (\Omega_{\tilde{Q}_1, G}^{\tilde{P}})'.$$

Pour $\tilde{s} \in \Omega^{\tilde{G}}$ soit $\hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, \tilde{s}} = \{\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1} | \tilde{s} \varpi = \varpi\}$. Alors $\tilde{s} \in (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})'$ si et seulement si $\hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, \tilde{s}} = \hat{\Delta}_{\tilde{P}}$. Par un argument classique basé sur l'identité (1.19) on obtient pour tous $x, g \in G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$, $h \in G(\mathbb{A})$ et $\tilde{y} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$.

$$\int_{[N_{1,\mathbb{E}}]} \int_{[N_{2,\mathbb{E}}]} \sum_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}_2} (-1)^{d_{\tilde{P}}} k_{\chi, \tilde{P}}(x, n_1 g, n_2 h, \tilde{y}) dn_2 dn_1 = \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(\mathbb{E}) \backslash P_1(\mathbb{E}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(\mathbb{E}) \backslash \tilde{P}_3(\mathbb{E})}} k_{P_{2,\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{1,\mathbb{E}, \chi}}(w_s^{-1} \gamma x, g, h, w_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{y}) \quad (3.4)$$

où

$$\Omega'_{\tilde{Q}_1} = \{(s, \tilde{s}) \in (\Omega^1 \backslash \Omega^{Q_2} / \Omega^2) \times (\Omega^{\tilde{3}} \backslash \Omega^{\tilde{Q}_2} / \Omega^{\tilde{1}}) | \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_2} = \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, s} \cap \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, \tilde{s}}\}.$$

Remarquons qu'on regarde donc $s \in \Omega^G$ comme un élément de $\Omega^{\tilde{G}}$.

On voit en particulier que l'expression entre la valeur absolue dans (3.3) égale

$$\Lambda_{d,12}^{\tilde{P}_1, T'} \Lambda_{m,3}^{\tilde{P}_2, T} \Lambda_{JLR,4}^{\tilde{P}_3, T''} (\sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(\mathbb{E}) \backslash P_1(\mathbb{E}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(\mathbb{E}) \backslash \tilde{P}_3(\mathbb{E})}} k_{P_{2,\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{1,\mathbb{E}, \chi}}(w_s^{-1} \gamma g, g, h, w_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{h})).$$

Écrivons maintenant $g = n_1 a_1^{st} m_1 k_1$, $h = n_2 a_2^{st} m_2 k_2$ et $\tilde{h} = n_3 a_3 m_3 k_3$ selon les décompositions suivantes :

$$P_1(\mathbb{E}) \backslash G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A}) = [N_{1,\mathbb{E}}] \times A_1^{st, \infty} \times (M_1(\mathbb{E}) \backslash (H_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times G_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A}))) \times K_{\mathbb{E}}, \\ P_2(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A}) = [N_2] \times A_2^{st, \infty} \times (M_2(\mathbb{F}) \backslash (H_2(\mathbb{A})^1 \times G_2(\mathbb{A}))) \times K, \\ \tilde{P}_3(\mathbb{F}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}) = [N_3] \times A_3^{\infty} \times (M_3(\mathbb{F}) \backslash M_3(\mathbb{A})^1) \times \tilde{K}.$$

Supposons que Φ est invariante à droite par un compact $K_0 \subseteq (G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}_f)$. Il résulte alors du lemme 1.5 que pour $(x, \tilde{x}), (y, \tilde{y}) \in (G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A})$ fixés les fonctions

$$\begin{aligned} P_1(E) \backslash G_E(\mathbb{A}) \times \tilde{P}_1(E) \backslash \tilde{G}_E(\mathbb{A}) \ni (x_1, \tilde{x}_1) &\mapsto \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(E) \backslash P_1(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)}} k_{P_2, E \times \tilde{P}_1, E, \chi}(w_s^{-1} \gamma x_1 a_1^{st} k_1, \tilde{x}_1 a_1^{st} k_1, x, w_s^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{x}), \\ P_2(E) \backslash G_E(\mathbb{A}) \ni x_2 &\mapsto \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(E) \backslash P_1(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)}} k_{P_2, E \times \tilde{P}_1, E, \chi}(w_s^{-1} \gamma y, \tilde{y}, x_2 a_2^{st} k_2, w_s^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{x}), \\ \tilde{P}_3(E) \backslash \tilde{G}_E(\mathbb{A}) \ni \tilde{x}_3 &\mapsto \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(E) \backslash P_1(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)}} k_{P_2, E \times \tilde{P}_1, E, \chi}(w_s^{-1} \gamma y, \tilde{y}, x, w_s^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{x}_3 a_3 k_3) \end{aligned}$$

sont invariantes à droite par l'intersection des compacts ouverts $\bigcap_{k \in K_E \hookrightarrow (G \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A})} (k K_0 k^{-1})$, $\bigcap_{k \in K \hookrightarrow G_E(\mathbb{A})} (k K_0 k^{-1})$ et $\bigcap_{\tilde{k} \in \tilde{K} \hookrightarrow \tilde{G}_E(\mathbb{A})} (\tilde{k} K_0 \tilde{k}^{-1})$ avec $(M_{1,E} \times M_{\tilde{1},E})(\mathbb{A}_f)$, $M_{2,E}(\mathbb{A}_f)$ et $M_{\tilde{3},E}(\mathbb{A}_f)$ respectivement. On applique alors la proposition 2.8 pour l'opérateur $\Lambda_d^{\tilde{P}_1, T}$ et la première fonction ci-dessus. On applique aussi la proposition 2.5 pour l'opérateur $\Lambda_m^{\tilde{P}_2, T'}$ et la deuxième fonction. On applique finalement la proposition 2.3 pour l'opérateur $\Lambda_{JLR}^{\tilde{P}_3, T''}$ et la troisième fonction. On trouve donc que pour tout $r_1, r_2 \geq 0$ il existe un nombre fini des opérateurs différentiels X, Y tels que l'expression (3.3) est majorée par la somme sur les X, Y de

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_{1,E}} \int_{\mathcal{M}_2} \int_{\mathcal{M}_3} \sup_{\substack{m'_1 \in H_{1,E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{1},E}(\mathbb{A}) \\ m'_1 \in H_{1,E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{1},E}(\mathbb{A}) \\ m'_2 \in H_{2,E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{2},E}(\mathbb{A}) \\ m'_3 \in M_{3,E}(\mathbb{A})^1}} (\|m'_1\| \|m'_1\| \|m'_2\| \|m'_3\|)^{-r_1} \sum_{\chi} \int_{K_E} \int_K \int_{\tilde{K}} \int_{A_1^{st, \infty}} \int_{A_2^{st, \infty}} \int_{A_3^{\infty}} \sigma_1^{\tilde{4}}(H_1(a_1^{st} m_1) - T'_1) \\ &\quad \sigma_2^{\tilde{5}}(H_2(a_2^{st} m_2) - T'_2) \sigma_3^{\tilde{6}}(H_3(a_3) - T''_3) e^{-2(\rho_{1,E}(H_1(a_1^{st} m_1)) + \rho_2(H_2(a_2^{st} m_2)) + \rho_3(H_3(a_3)))} \\ &\quad \left| \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{[N_{1,E}][N_{\tilde{3},E}]}} \int_{[N_{1,E}]} \int_{[N_{\tilde{3},E}]} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(E) \backslash P_1(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)}} k_{\Phi_{X,Y}, P_2, E \times \tilde{P}_1, E, \chi}(w_s^{-1} \gamma n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, a_1^{st} m'_1 k_1, a_2^{st} m'_2 k_2, w_s^{-1} \tilde{\gamma} n_3 a_3 m'_3 k_3) \right. \\ &\quad \left. dn_3 dn_1 \|\det m_1 a_1^{st}\|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \|\det m_2 a_2^{st}\|_{\mathbb{A}}^{\sigma'} da_3 da_2^{st} da_1^{st} dk_3 dk_2 dk_1) (\|m_1\| \|m_2\| \|m_3\|)^{-r_2} dm_3 dm_2 dm_1 \right. \quad (3.5) \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_{\tilde{1},E} = \mathfrak{S}_{B_E \cap M_{1,E}}^{M_{1,E}} \cap (H_{\tilde{1},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{1},E}(\mathbb{A}))$, $\mathcal{M}_2 = \mathfrak{S}_{B \cap M_2}^{M_2} \cap (H_2(\mathbb{A})^1 \times G_2(\mathbb{A}))$, $\mathcal{M}_3 = \mathfrak{S}_{\tilde{B} \cap M_3}^{M_3} \cap M_3(\mathbb{A})^1$ et l'on a remplacé la fonction Φ , en passant par la formule (1.15) et en utilisant le même raisonnement que sur la page 104 de [Art80], par une fonction $\Phi_{X,Y} := X * \Phi * Y$, qui dépend des opérateurs X et Y . Remarquons que le support de $\Phi_{X,Y}$ est contenu dans celui de Φ .

Lemme 3.2. *Avec la notation ci-dessus, il existe des constantes positives $c, N > 0$ telles que si*

$$\begin{aligned} &|\sigma_1^{\tilde{4}}(H_1(a_1^{st} m_1) - T'_1) \sigma_2^{\tilde{5}}(H_2(a_2^{st} m_2) - T'_2) \sigma_3^{\tilde{6}}(H_3(a_3) - T''_3)| \int_{[N_{1,E}][N_{\tilde{3},E}]} \int_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(E) \backslash P_1(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)}} k_{\Phi_{X,Y}, P_2, E \times \tilde{P}_1, E, \chi}(w_s^{-1} \gamma n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, a_1^{st} m'_1 k_1, a_2^{st} m'_2 k_2, w_s^{-1} \tilde{\gamma} n_3 a_3 m'_3 k_3) dn_3 dn_1 \\ &\quad \text{est non-nulle, alors} \end{aligned}$$

$$\|a_1^{st}\|, \|a_2^{st}\|, \|a_3^{\tilde{G}}\| \leq c(\|m_1\| \|m_2\| \|m'_1\| \|m'_1\| \|m'_2\| \|m'_3\|)^N$$

où $a_3^{\tilde{G}}$ c'est la projection de a_3 à $A_3^{\tilde{G}, \infty}$.

Démonstration. Si l'expression dans le lemme est non-nulle il existe des $(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}$, $\gamma \in (P_1 \cap sP_2)(E) \backslash P_1(E)$, $\tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s}\tilde{P}_1)(E) \backslash \tilde{P}_3(E)$, $n_1 \in N_{1,E}(\mathbb{A})$ et $n_{\tilde{3}} \in N_{\tilde{3},E}(\mathbb{A})$ tels que

$$k_{\Phi_{X,Y,P_2,E} \times \tilde{P}_{1,E},\chi}(w_s^{-1}\gamma n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, a_1^{st} m'_1 k_1, a_2^{st} m'_2 k_2, w_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{\gamma} n_{\tilde{3}} a_{\tilde{3}} m'_{\tilde{3}} k_{\tilde{3}}) \neq 0.$$

Il résulte alors du lemme 1.5 qu'il existe des $m''_1 \in M_{1,E}(\mathbb{A})^1$ et $m''_2 \in M_{2,E}(\mathbb{A})^1$ tels que

$$k_{\Phi_{X,Y,P_2,E} \times \tilde{P}_{1,E}}(w_s^{-1}\gamma n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, a_1^{st} m''_1 m'_1 k_1, a_2^{st} m''_2 m'_2 k_2, w_{\tilde{s}}^{-1} \tilde{\gamma} n_{\tilde{3}} a_{\tilde{3}} m'_{\tilde{3}} k_{\tilde{3}}) \neq 0. \quad (3.6)$$

Soit $\tilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{0}})$ tel que $\tilde{B} \subseteq \tilde{P}_1$, que l'on a choisi ci-dessus. Décomposons $m'_1 = b'_1 k$ et $m'_{\tilde{3}} = \tilde{b}'_3 \tilde{k}$ selon les décompositions d'Iwasawa $M_{1,E}(\mathbb{A}) = (B_E \cap M_{1,E}(\mathbb{A}))(K_E \cap M_{1,E}(\mathbb{A}))$ et $M_{\tilde{3},E}(\mathbb{A}) = (\tilde{B}_E \cap M_{\tilde{3},E}(\mathbb{A}))(\tilde{K}_E \cap M_{\tilde{3},E}(\mathbb{A}))$. Décomposons aussi $\gamma^{-1}w_s = nw_s' b$ selon la décomposition de Bruhat, avec $n \in N_B(E)$, $s' \in \Omega^{Q_2}$ et $b \in B(E)$. Notons que $s = s'$ dans $\Omega^1 \backslash \Omega^{Q_2} / \Omega^2$ on peut supposer donc que $s' = s$. Alors, si l'on a (3.6), on voit qu'il existe des $n' \in N_{B,E}(\mathbb{A})$ et $\xi \in M_2(E)N_{2,E}(\mathbb{A})$ tels que l'expression

$$(b'_1)^{-1} (a_1^{st})^{-1} n' w_s \xi a_2^{st} m''_2 m'_2 \quad (3.7)$$

appartient à un compact de $G_E(\mathbb{A})$ qui ne dépend que du support de Φ . De même, il existe des $\tilde{n} \in N_{\tilde{B},E}(\mathbb{A})$ et $\tilde{\xi} \in M_{\tilde{1}}(E)N_{\tilde{1},E}(\mathbb{A})$ tels que l'expression

$$(\tilde{b}'_3)^{-1} a_{\tilde{3}}^{-1} \tilde{n} w_{\tilde{s}} \tilde{\xi} a_{\tilde{1}}^{st} m''_{\tilde{1}} m'_{\tilde{1}} \quad (3.8)$$

appartient dans un compact de $\tilde{G}_E(\mathbb{A})$ qui ne dépend que du support de Φ .

En utilisant les représentations du plus haut poids $d\varpi$ où $d \in \mathbb{N}$ et $\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{2}}$ et en regardant l'action de l'élément (3.7) par des telles représentations, comme le fait Arthur dans [Art80] pages 102-103, on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{2}}$ on a

$$\varpi(H_{\tilde{B}}(a_2^{st})) - s\varpi(H_{\tilde{B}}(a_1^{st})) \leq C(1 + |\varpi(H_{\tilde{B}}(m'_2))| + |s\varpi(H_{\tilde{B}}(b'_1))|)$$

En utilisant alors les propriétés (1.8), (1.12) et (1.13) de la hauteur on trouve

$$\varpi(H_{\tilde{B}}(a_2^{st})) - s\varpi(H_{\tilde{B}}(a_1^{st})) \leq C'(1 + \log(\|m'_2\| \|m'_1\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{2}} \quad (3.9)$$

pour un $C' > 0$. Par le même raisonnement appliqué à l'expression (3.8) on trouve

$$\varpi(H_{\tilde{B}}(a_{\tilde{1}}^{st})) - \tilde{s}\varpi(H_{\tilde{B}}(a_{\tilde{3}})) \leq C''(1 + \log(\|m'_{\tilde{1}}\| \|m'_{\tilde{3}}\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{1}} \quad (3.10)$$

pour un $C'' > 0$.

D'autre côté, en vertu de l'égalité (3.4) ci-dessus, l'expression entre la valeur absolue dans le lemme égale simplement

$$\begin{aligned} & \int_{[N_{1,E}]} \int_{[N_{\tilde{3},E}]} \int_{[N_{\tilde{1},E}]} \int_{[N_{2,E}]} \\ & \sum_{\tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{Q}_2} (-1)^{d_{\tilde{P}}} k_{\Phi_{X,Y,P_E} \times \tilde{P}_{E,\chi}}(n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, n_{\tilde{1}} a_{\tilde{1}}^{st} m'_{\tilde{1}} k_1, n_2 a_2^{st} m'_2 k_2, n_{\tilde{3}} a_{\tilde{3}} m'_{\tilde{3}} k_{\tilde{3}}) dn_2 dn_{\tilde{1}} dn_{\tilde{3}} dn_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

à un signe près. En vertu du corollaire 1.9 de nouveau, on a pour tout \tilde{P} entre \tilde{Q}_1 et \tilde{Q}_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{[N_{1,E}]} \int_{[N_{\tilde{3},E}]} k_{\Phi_{X,Y,P_E} \times \tilde{P}_{E,\chi}}(n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, n_{\tilde{1}} a_{\tilde{1}}^{st} m'_{\tilde{1}} k_1, n_2 a_2^{st} m'_2 k_2, n_{\tilde{3}} a_{\tilde{3}} m'_{\tilde{3}} k_{\tilde{3}}) dn_1 dn_{\tilde{3}} = \\ & \sum_{\substack{s' \in \Omega^2 \backslash \Omega^P / \Omega^1 \\ s' \in \Omega^{\tilde{1}} \backslash \Omega^{\tilde{P}} / \Omega^{\tilde{3}}}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s' P_1)(E) \backslash P_2(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s}' \tilde{P}_3)(E) \backslash \tilde{P}_1(E)}} k_{\Phi_{X,Y,P_{1,E} \times \tilde{P}_{3,E},\chi}}(a_1^{st} m'_1 k_1, w_{s'}^{-1} \tilde{\gamma} n_{\tilde{1}} a_{\tilde{1}}^{st} m'_{\tilde{1}} k_1, w_{s'}^{-1} \gamma n_2 a_2^{st} m'_2 k_2, a_{\tilde{3}} m'_{\tilde{3}} k_{\tilde{3}}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'expression (3.11) égale

$$\int_{[N_{1,E}]} \int_{[N_{2,E}]} \sum_{(s', \tilde{s}') \in \Omega''_{\tilde{Q}_1}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s'P_1)(E) \setminus P_2(E) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s}'\tilde{P}_3)(E) \setminus \tilde{P}_1(E)}} k_{\Phi_{X,Y}, P_{1,E} \times \tilde{P}_{3,E}, \chi} (a_1^{st} m'_1 k_1, w_{s'}^{-1} \tilde{\gamma} n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, w_{s'}^{-1} \gamma n_2 a_2^{st} m'_2 k_2, a_3 m'_3 k_3) dn_2 dn_1$$

où

$$\Omega''_{\tilde{Q}_1} = \{(s', \tilde{s}') \in (\Omega^2 \setminus \Omega^{Q_2} / \Omega^1) \times (\Omega^{\tilde{1}} \setminus \Omega^{\tilde{Q}_1} / \Omega^{\tilde{3}}) | \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_2} = \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, s'} \cap \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1, \tilde{s}'}\}.$$

Donc, si l'expression du lemme est non-nulle, on obtient, en utilisant le lemme 1.5 qu'il existe des $(s', \tilde{s}') \in \Omega''_{\tilde{Q}_1}$, $\gamma \in (s'P_1 \cap P_2)(E) \setminus P_2(E)$, $\tilde{\gamma} \in (\tilde{s}'\tilde{P}_3 \cap \tilde{P}_1)(E) \setminus \tilde{P}_1(E)$, $n_2 \in N_{2,E}(\mathbb{A})$, $n_1 \in N_{1,E}(\mathbb{A})$, $m'_1 \in M_{1,E}(\mathbb{A})^1$ et $m'_3 \in M_{3,E}(\mathbb{A})^1$ tels que

$$k_{\Phi_{X,Y}, P_{1,E} \times \tilde{P}_{3,E}} (a_1^{st} m''_1 m'_1 k_1, w_{s'}^{-1} \tilde{\gamma} n_1 a_1^{st} m'_1 k_1, w_{s'}^{-1} \gamma n_2 a_2^{st} m'_2 k_2, a_3 m''_3 k_3) \neq 0.$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouve une constante $C''' > 0$ telle que

$$\varpi(H_{\tilde{B}}(a_1^{st})) - s' \varpi(H_{\tilde{B}}(a_2^{st})) \leq C'''(1 + \log(\|m'_2\| \|m'_1\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{1}}, \quad (3.12)$$

$$\varpi(H_{\tilde{B}}(a_3^{st})) - \tilde{s}' \varpi(H_{\tilde{B}}(a_1)) \leq C'''(1 + \log(\|m'_1\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{3}}. \quad (3.13)$$

On est en mesure d'appliquer le lemme A.4 de l'appendice A. On l'applique pour les données suivantes. Pour le groupe G on prend \tilde{G} . Pour le sous-groupe parabolique minimal qu'on fixe au début de l'appendice on prend \tilde{B} fixé ci-dessus, contenu dans $\tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_3$. Les sous-groupes \tilde{P}_1 , \tilde{P}_2 , \tilde{P}_3 , \tilde{P}_4 , \tilde{P}_5 et \tilde{P}_6 correspondent donc aux P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 et P_6 du lemme. Pour les éléments H_1 , H_2 et H_3 on prend les projections à $\mathfrak{a}_1^{\tilde{G}}$, $\mathfrak{a}_2^{\tilde{G}}$ et $\mathfrak{a}_3^{\tilde{G}}$ des $H_{\tilde{B}}(\mathfrak{a}_1^{st})$, $H_{\tilde{B}}(\mathfrak{a}_2^{st})$ et $H_{\tilde{B}}(\mathfrak{a}_3)$ respectivement. Pour X_1 , X_2 et X_3 on prend $T_1 - H_{\tilde{B}}(m_1)$, $T_2 - H_{\tilde{B}}(m_2)$ et T_3 respectivement. Pour les éléments du groupe de Weyl on prend $s_1 = s'$, $s'_1 = s$, $s_2 = \tilde{s}'$ et $s'_2 = \tilde{s}$. Les conditions $(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}$ et $(s', \tilde{s}') \in \Omega''_{\tilde{Q}_1}$ disent qu'ils vérifient la condition (A.8) du lemme A.4. Les inégalités du lemme A.4 correspondent aux inégalités qu'on a construit de façon suivant :

$$(A.10) \leftrightarrow (3.12), \quad (A.11) \leftrightarrow (3.9), \quad (A.12) \leftrightarrow (3.10), \quad (A.13) \leftrightarrow (3.13).$$

Les inégalités déterminent les constantes M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

Il nous reste à justifier que la condition (A.9) soit vérifiée. Ceci découle du lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient $s \in \Omega^G$ et $\tilde{B}, \tilde{B}' \in \mathcal{P}(M_{\tilde{0}}) \cap \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$. Alors*

$$s(\hat{\Delta}_{\tilde{B}} \setminus \hat{\Delta}_{\tilde{B}'}) \cap \hat{\Delta}_{\tilde{B}'} = \emptyset.$$

Démonstration. Raisonnons par absurde. Soient \tilde{B}, \tilde{B}' et $s \in \Omega^G$ comme ci-dessus et soit $\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{B}} \setminus \hat{\Delta}_{\tilde{B}'}$ tel que $s\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{B}'}$. Soit $\tilde{P} \supseteq \tilde{B}$ associé à $\{\varpi\} \subseteq \hat{\Delta}_{\tilde{B}}$ et soit $\tilde{P}' \supseteq \tilde{B}'$ associé à $\{s\varpi\} \subseteq \hat{\Delta}_{\tilde{B}'}$. Alors $\tilde{P}, \tilde{P}' \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et $s\tilde{P} = \tilde{P}'$. Soit $W_0 \subseteq W$ le sous-espace de W tel que \tilde{P} est défini comme le stabilisateur de W_0 . Donc, \tilde{P}' est le stabilisateur de sW_0 . Deux cas sont possibles. Soit $W_0 = V_0 \subseteq V$ soit $W_0 = V_0 \oplus D_0 \subseteq W$ où $V_0 \subseteq V$ et D_0 c'est la droite telle que $W = V \oplus D_0$. Dans le deux cas, le groupe $P = \tilde{P} \cap G$ est le stabilisateur de V_0 et le groupe $P' = \tilde{P}' \cap G$ est le stabilisateur de sV_0 . Les sous-groupes paraboliques P et P' sont standards (contiennent B) et sont définies comme les stabilisateurs d'un sous-espace de V de dimension $\dim V_0 = \dim sV_0$. Ils sont donc égaux. Cela démontre que $sV_0 = V_0$ et, puisque $sV = V$ et $sD_0 = D_0$, par conséquent $sW_0 = W_0$, d'où $\tilde{P} = \tilde{P}'$ ce qui est absurde. \square

Puisque $s = s'_1$ appartient à Ω^G , en vertu du lemme 3.3 ci-dessus, il vérifie la propriété (A.9) du lemme A.4. Alors, grâce au lemme A.4, la propriété (1.13) de la hauteur et le lemme 1.10 on conclut la preuve du lemme 3.2. \square

Revenons à l'expression (3.5). On traite toujours les variables n_1, a_1^{st}, m_1 etc. comme fixées. On suppose que les variables a_1^{st}, a_2^{st} et $a_3^{\tilde{G}}$ vérifient les conditions du lemme 3.2. Posons $g = n_1 a_1^{st} m_1' k_1$, $\tilde{g} = a_1^{st} m_1' k_1$, $h = a_2^{st} m_2' k_2$ et $\tilde{h} = n_3 a_3^{\tilde{G}} m_3' k_3$, et notons aussi \tilde{g}' la projection de \tilde{g} à $\tilde{G}_{\tilde{E}}(\mathbb{A})^1$. Posons pour $x \in G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1$

$$\Psi(x, \tilde{x}) = \int_{A_G^\infty} k_{\Phi_{X,Y}, P_{2,\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{1,\mathbb{E}}, \chi}(x, \tilde{g}, h, \tilde{x} a_{\tilde{G}}) da_{\tilde{G}}.$$

Par le même argument qu'au début de la preuve on a

$$\Psi(x, \tilde{x}) = \Psi(x, \tilde{x}) \hat{\tau}_2(H_2(x) - H_2(h) - T_{2,\Phi}) \hat{\tau}_1(H_1(\tilde{x}) - H_1(\tilde{g}) - T_{1,\Phi})$$

pour certains $T_{2,\Phi} \in \mathfrak{a}_2$, $T_{1,\Phi} \in \mathfrak{a}_1$ qui ne dépendent que du support de Φ . En faisant un changement de variables on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{A_G^\infty} \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'} \left| \sum_{\substack{\gamma \in (P_1 \cap s P_2)(\mathbb{E}) \setminus P_1(\mathbb{E}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_3 \cap \tilde{s} \tilde{P}_1)(\mathbb{E}) \setminus \tilde{P}_3(\mathbb{E})}} k_{\Phi_{X,Y}, P_{2,\mathbb{E}} \times \tilde{P}_{1,\mathbb{E}}, \chi}(w_s^{-1} \gamma n_1 a_1^{st} m_1' k_1, a_1^{st} m_1' k_1, a_2^{st} m_2' k_2, w_s^{-1} \tilde{\gamma} n_3 a_3^{\tilde{G}} a_{\tilde{G}} m_3' k_3) \right| da_{\tilde{G}} \\ \leq \sum_{\substack{\gamma \in P_2(\mathbb{E}) \setminus G(\mathbb{E}) \\ \tilde{\gamma} \in \tilde{P}_1(\mathbb{E}) \setminus \tilde{G}(\mathbb{E})}} \Psi(\gamma g, \tilde{\gamma} \tilde{h}) \hat{\tau}_2(H_2(\gamma g) - H_2(h) - T_{2,\Phi}) \hat{\tau}_1(H_1(\tilde{\gamma} \tilde{h}) - H_1(\tilde{g}) - T_{1,\Phi}). \end{aligned}$$

En vertu du lemme 1.8 iii) et de la propriété (1.12) pour tout $N_0, N_1 > 0$, il existe des constantes positives c', N' telles que l'expression ci-dessus est majorée par

$$c' (\|g\| \|h\| \|\tilde{g}\| \|\tilde{h}\|)^{N'} \sup_{(x, \tilde{x}) \in G_{\mathbb{E}}(\mathbb{A}) \times \tilde{G}_{\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1} (\Psi(x, \tilde{x}) \|x\|^{-N_0} \|\tilde{x}\|^{-N_1}).$$

On prend donc N_0 et N_1 comme dans le lemme 1.4 et on trouve que l'expression (3.5) est majorée par

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_{1,\mathbb{E}}} \int_{\mathcal{M}_2} \int_{\mathcal{M}_3} \sup_{\substack{m_1' \in H_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times G_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A}) \\ m_1' \in H_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{1,\mathbb{E}}(\mathbb{A}) \\ m_2' \in H_{2,\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times G_{2,\mathbb{E}}(\mathbb{A}) \\ m_3' \in M_{3,\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1}} ((\|m_1'\| \|m_1'\| \|m_2'\| \|m_3'\|)^{-r_1} \int_{A_1^{st,\infty}} \int_{A_2^{st,\infty}} \int_{A_3^{\tilde{G},\infty}} (\|a_1^{st}\| \|a_2^{st}\| \|a_3^{\tilde{G}}\|)^{N''}) \\ (\|m_1\| \|m_2\| \|m_3\| \|m_1'\| \|m_1'\| \|m_2'\| \|m_3'\|)^{N''} da_3^{\tilde{G}} da_2^{st} da_1^{st} (\|m_1\| \|m_2\| \|m_3\|)^{-r_2} dm_3 dm_2 dm_1 \end{aligned}$$

où on a utilisé une majoration de type

$$e^{-2(\rho_{1,\mathbb{E}}(H_1(a_1^{st} m_1)) + \rho_2(H_2(a_2^{st} m_2)) + \rho_3(H_3(a_3)))} |\det m_1 a_1^{st}|_{\mathbb{A}}^{\sigma'} |\det m_2 a_2^{st}|_{\mathbb{A}}^{\sigma'} \leq (\|a_1^{st}\| \|a_2^{st}\| \|a_3^{\tilde{G}}\| \|m_1\| \|m_2\|)^{N''}$$

et la constante N'' ne dépend que de cette constante N''' , des constantes fixés N_0, N_1 du lemme 1.4, des t et t' de la propriété (1.12) de la hauteur et des t_1, t_2 du lemme 1.10. En prenant alors r_1 et r_2 dans le lemme 3.2 suffisamment grands on obtient la convergence de l'intégrale du théorème. \square

3.2 Polynômes-exponentielles

Soit \mathcal{V} un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Par un polynôme-exponentielle sur \mathcal{V} on entend une fonction sur \mathcal{V} de la forme

$$f(v) = \sum_{\lambda \in \mathcal{V}^*} e^{\lambda(v)} P_{\lambda}(v), \quad v \in \mathcal{V}$$

où P_λ est un polynôme sur \mathcal{V} à coefficients complexes, nul pour presque tout $\lambda \in \mathcal{V}^*$. On appelle $\lambda \in \mathcal{V}^*$ tels que $P_\lambda \neq 0$ les exposants de f et le polynôme correspondant à $\lambda = 0$ le terme purement polynomial de f . On a alors le résultat d'unicité suivant : si f est comme ci-dessus et $g = \sum_{\lambda \in \mathcal{V}^*} e^\lambda Q_\lambda$ est un polynôme-exponentielle sur \mathcal{V} tel que $g(v) = f(v)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ alors pour tout $\lambda \in \mathcal{V}^*$ on a $P_\lambda = Q_\lambda$.

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ et tout sous-groupe parabolique relativement standard \tilde{Q} de \tilde{G} , avec la notation du paragraphe 1.9, prenons $s \det -2\rho_Q$ vu comme un élément de $(\mathfrak{a}_{\tilde{Q},\mathbb{C}}^{st})^*$ et définissons $\underline{\rho}_{\tilde{Q},s} \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q},\mathbb{C}}^*$ comme $\iota_Q^{st}(s \det -2\rho_Q) + 2\rho_{\tilde{Q}}$. Notons aussi $s_{\tilde{Q}} \in \mathbb{C}$ défini par la propriété :

$$e^{-\underline{\rho}_{\tilde{Q},s}(H_{\tilde{Q}}(m))} = |\det m|_{\mathbb{A}}^{s_{\tilde{Q}}} \quad \forall m \in H_{\tilde{Q},\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},\mathbb{E}}(\mathbb{A}). \quad (3.14)$$

Lemme 3.4 (cf. lemme 3.2 de [Zyd15a]). *Soit \tilde{Q} un sous-groupe parabolique standard de \tilde{G} . Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ et tout $\tilde{\omega}^\vee \in \tilde{\Delta}_{\tilde{Q}}^\vee$ on a $\underline{\rho}_{\tilde{Q},s}(\tilde{\omega}^\vee) \neq 0$.*

On rappelle la définition de la fonction Γ'_Q donnée par (1.3) dans le paragraphe 1.1, ainsi que la définition de la fonction $\hat{\theta}_Q$ donnée par (1.6) dans le paragraphe 1.3. Le polynôme-exponentielle en question dans le cas des groupes linéaires est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$.*

1) *Pour tout $s \in \mathbb{C}$*

$$p_{\tilde{Q},s}(X) := \int_{A_{\tilde{Q}}^{st,\infty}} e^{(s \det + 2\rho_{\tilde{Q}} - 2\rho_Q)(H_{\tilde{Q}}(a))} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a), X) da, \quad X \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$$

est un polynôme-exponentielle sur $\mathfrak{a}_{\tilde{Q}}/\mathfrak{a}_{\tilde{G}}$.

2) *Pour tout $m \in H_{\tilde{Q},\mathbb{E}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},\mathbb{E}}(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$ on a*

$$\int_{A_{\tilde{Q}}^{st,\infty}} e^{(s \det + 2\rho_{\tilde{Q}} - 2\rho_Q)(H_{\tilde{Q}}(a))} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a) + H_Q(m) - T_{\tilde{Q}}, X) da = |\det m|_{\mathbb{A}}^{s_{\tilde{Q}}} e^{\underline{\rho}_{\tilde{Q},s}(T_{\tilde{Q}})} p_{\tilde{Q},s}(X).$$

3) *Si $s \neq -1, 1$, pour tout $\tilde{R} \supseteq \tilde{Q}$ il existe un polynôme $P_{\tilde{Q},\tilde{R},s}$ de degré au plus $d_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}$ sur $\mathfrak{a}_{\tilde{R}}/\mathfrak{a}_{\tilde{G}}$ tel que*

$$p_{\tilde{Q},s}(X) := j_{\tilde{Q}}^{-1} \sum_{\tilde{R} \supseteq \tilde{Q}} e^{\underline{\rho}_{\tilde{R},s}(X_{\tilde{R}})} p_{\tilde{Q},\tilde{R},s}(X_{\tilde{R}})$$

où $p_{\tilde{Q},\tilde{G},s}(X_{\tilde{G}}) = (-1)^{d_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}} \hat{\theta}_{\tilde{Q}}(\underline{\rho}_{\tilde{Q},s})^{-1}$ et $j_{\tilde{Q}}$ est défini par la propriété 1.21 dans le paragraphe 1.9. En particulier, si $s \neq -1, 1$, la fonction $p_{\tilde{Q},s}$ est un polynôme-exponentielle dont le terme purement polynomial est constant et égale $(-1)^{d_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_{\tilde{Q},s})^{-1}$.

3.3 Une généralisation du théorème 3.1

Soit $\eta : F^* \backslash \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{C}$ le caractère quadratique associé à l'extension \mathbb{E}/F par la théorie de corps de classes. On définit le caractère, noté aussi η , sur $G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A})$ comme $(h, \tilde{h}) \mapsto \eta(\det(\tilde{h})^n \det(h)^{n+1})$.

Soient $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $s, s' \in \mathbb{C}$ et $\chi \in \mathcal{X}^{G_{\mathbb{E}} \times \tilde{G}_{\mathbb{E}}}$. En vertu du théorème 3.1 la distribution $I_\chi^T(s, s', \cdot)$ qui à $\Phi \in C_c^\infty((G_{\mathbb{E}} \times \tilde{G}_{\mathbb{E}})(\mathbb{A}))$ associe

$$I_\chi^T(s, s', \Phi) := \int_{[G_{\mathbb{E}}]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} k_{\Phi,\chi}^T(g, g, h, \tilde{h}) |\det g|^s |\det h|^{s'} \eta(h, \tilde{h}) dx dh d\tilde{h}$$

est bien définie.

Soient W' un F -espace vectoriel de dimension $m+1$, $V' \subseteq W'$ un sous-espace de dimension m et $D'_0 \subseteq (W' \setminus V') \cup \{0\}$ une droite, où $m \in \mathbb{N}$. Soient $H = \prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i}$, $G' = \mathrm{GL}(V')$ et $\tilde{G}' = \mathrm{GL}(W')$ où $k \in \mathbb{N}$, et $n_i \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, \dots, k$. On identifie G' avec le sous-groupe de \tilde{G}' qui agit trivialement sur D'_0 . Soient aussi $V'_E = V' \otimes_F E$ et $W'_E = W' \otimes_F E$ des E -espaces vectoriels et notons $G'_E = \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}(V'_E))$ et $\tilde{G}'_E = \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}(W'_E))$. Notons aussi $H_E = \prod_{i=1}^k \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{n_i})$. Les groupes $H \times G'$, $H \times \tilde{G}'$, $H_E \times G'_E$ sont alors naturellement plongés dans $H_E \times \tilde{G}'_E$. On va généraliser le théorème 3.1 au cas de l'action naturelle

$$\Delta(H_E \times G'_E) \backslash ((H_E \times G'_E) \times (H_E \times \tilde{G}'_E)) / (H \times G') \times (H \times \tilde{G}').$$

Soit B' un sous- F -groupe de Borel de $H \times G'$ et fixons aussi M_0 une partie de Levi de B' . Soit $M_{\tilde{0}}$ l'unique sous-groupe de Levi minimal de $H \times \tilde{G}'$ tel que $M_{\tilde{0}} \supseteq M_0$. On a en particulier l'ensemble $\mathcal{F}(B')$ de sous-groupes paraboliques de $H \times G'$ contenant B' ainsi que $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques semi-standards de $H \times \tilde{G}'$. Notons $\mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B')$ l'ensemble de $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ tels que $\tilde{P} \supseteq B'$. Pour $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B')$ on note $P = (H \times G') \cap \tilde{P}$. Soit $M_{0,E}$ (resp. $M_{\tilde{0},E}$) l'unique sous- F -groupe de Levi minimal de $H_E \times G'_E$ (resp. de $H_E \times \tilde{G}'_E$) contenant M_0 (resp. $M_{\tilde{0}}$). Pour tout $P \in \mathcal{F}(B')$ (resp. $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$) il existe un unique élément de $\mathcal{F}(M_{0,E})$ (resp. $\mathcal{F}(M_{\tilde{0},E})$), noté P_E (resp. \tilde{P}_E), dont l'intersection avec $H \times G'$ (resp. $H \times \tilde{G}'$) égale P (resp. \tilde{P}). La discussion et conventions du paragraphe 1.11 s'appliquent dans ce cas et va les utiliser sans commentaire.

Fixons un sous-groupe de Borel $\tilde{B}_0 \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$. Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$. Pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}_0}$ on note $H_{\tilde{P}}$ la projection de sH à $\mathfrak{a}_{\tilde{P}}$ où s est un élément du groupe de Weyl de $H \times \tilde{G}'$ tel que $s^{-1}\tilde{P} \supseteq \tilde{B}_0$.

Pour une fonction $f \in C_c^\infty((H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})) \times (H_E(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'_E(\mathbb{A})))$, un $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B')$ et une donnée cuspidale $\chi \in \mathcal{X}^{(H_E \times G'_E) \times (H_E \times \tilde{G}'_E)}$ on pose

$$k_{f, \tilde{P}, \chi}(\tilde{x}, \tilde{y}) := k_{f, P_E \times \tilde{P}_E, \chi}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

où $\tilde{x}, \tilde{y} \in N_{P_E \times \tilde{P}_E}(\mathbb{A}) M_{P \times \tilde{P}}(\mathbb{A}) \backslash (H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})) \times (H_E(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'_E(\mathbb{A}))$. Pour un $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}_0}^+$ on pose donc

$$k_{f, \chi}^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = \sum_{\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B')} (-1)^{d_{\tilde{P}}^{H \times \tilde{G}'}} \sum_{\substack{\delta_1 \in P(E) \backslash (H \times G')(E) \\ \delta_2 \in P(F) \backslash (H \times G')(F) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(F) \backslash (H \times \tilde{G}')(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{H \times \tilde{G}'}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 y) - T_{\tilde{P}}) k_{f, \tilde{P}, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 \tilde{x}, \delta_2 y, \delta_3 \tilde{y}),$$

où $x \in H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})$, $y \in H(\mathbb{A})^1 \times G'(\mathbb{A})$, $\tilde{y} \in H(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'(\mathbb{A})$ et $\tilde{x} \in H_E(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'_E(\mathbb{A})$. Notons aussi $\det \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}_0}$ le déterminant de $H \times \tilde{G}'$ et pour $s \in \mathbb{C}$ et $x \in H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})$ notons $|\det x|_{\mathbb{A}}^s$ l'expression $e^{s \det H_{H \times \tilde{G}'}(x)}$.

Théorème 3.6. *Soit $f \in C_c^\infty((H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})) \times (H_E(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'_E(\mathbb{A})))$, alors pour tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{B}_0}^+$ suffisamment régulier et tous $\sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ on a*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{(H_E \times G'_E) \times (H_E \times \tilde{G}'_E)}} \int_{[H_E]^1 \times [G'_E]} \int_{[H]^1 \times [G']} \int_{[H]^1 \times [\tilde{G}']} |k_{f, \chi}^T(x, x, y, \tilde{y})| |\det x|_{\mathbb{A}}^\sigma |\det y|_{\mathbb{A}}^{\sigma'} d\tilde{y} dy dx < \infty.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.1. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Notons n' le rang du groupe $H \times G'$. On définit alors le caractère η sur $(H \times G')(\mathbb{A}) \times (H \times \tilde{G}')(\mathbb{A})$ par $\eta(y, \tilde{y}) = \eta((\det y)^{n'+1}(\det \tilde{y})^{n'})$. Notons alors pour $s, s' \in \mathbb{C}$, $\chi \in \mathcal{X}^{(H_E \times G'_E) \times (H_E \times \tilde{G}'_E)}$ et $f \in C_c^\infty((H_E(\mathbb{A})^1 \times G'_E(\mathbb{A})) \times (H_E(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}'_E(\mathbb{A})))$

$$I_\chi^{H \times \tilde{G}', T}(s, s', f) = \int_{[H_E]^1 \times [G'_E]} \int_{[H]^1 \times [G']} \int_{[H]^1 \times [\tilde{G}']} k_{f, \chi}^T(x, x, y, \tilde{y}) |\det x|_\mathbb{A}^s |\det y|_\mathbb{A}^{s'} \eta(y, \tilde{y}) d\tilde{y} dy dx.$$

Revenons dans le contexte de l'inclusion $G \hookrightarrow \tilde{G}$. Soit \tilde{Q} un sous-groupe parabolique relativement standard de \tilde{G} . Comme il est expliqué dans le paragraphe 1.9, on a les décompositions $M_{\tilde{Q}} \cong H_{\tilde{Q}} \times \tilde{G}_{\tilde{Q}}$ et $M_Q \cong H_{\tilde{Q}} \times G_{\tilde{Q}}$ où $H_{\tilde{Q}}$, $G_{\tilde{Q}}$ et $\tilde{G}_{\tilde{Q}}$ vérifient les conditions de ce paragraphe.

Soit $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$, et $\{\chi'\} \subseteq \mathcal{X}^{M_{Q,E} \times M_{\tilde{Q},E}}$ la préimage de χ par l'application naturelle $\mathcal{X}^{M_{Q,E} \times M_{\tilde{Q},E}} \rightarrow \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ et $s, s' \in \mathbb{C}$, on définit alors la distribution $I_\chi^{M_{\tilde{Q}}, T}(s, s', \cdot)$ sur $C_c^\infty((H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})) \times (H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})))$ par :

$$I_\chi^{M_{\tilde{Q}}, T}(s, s', f) = \sum_{\chi'} I_{\chi'}^{M_{\tilde{Q}}, T}(s, s' + s'_{\tilde{Q}} + s_{\tilde{Q}}, f),$$

où $s_{\tilde{Q}}$ est défini par (3.14) et pour $\chi' \in \mathcal{X}^{M_{Q,E} \times M_{\tilde{Q},E}}$, $I_{\chi'}^{M_{\tilde{Q}}, T}(s, s', \cdot)$ c'est la distribution associée à l'inclusion $M_Q \hookrightarrow M_{\tilde{Q}}$ décrite ci-dessus par rapport au sous-groupe de Levi minimal M_0 de M_Q et aux sous-groupes de Borel $B \cap M_Q$ de M_Q et $\tilde{B}_0 \cap M_{\tilde{Q}}$ de $M_{\tilde{Q}}$.

Pour $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ et $s \in \mathbb{C}$ on définit

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{Q}, s}(x, \tilde{x}) &= \int_{K_E \times K \times \tilde{K}} \int_{(N_{Q,E} \times N_{\tilde{Q},E})(\mathbb{A})} \int_{(A^{st, \infty})^2} e^{\rho_{Q,E}(H_{Q,E}(a_1 x)) + \rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q},E}(a_3 \tilde{x}))} \Phi(k_1^{-1} a_1 x n_Q k_2, k_1^{-1} a_3 \tilde{x} n_{\tilde{Q}} k_3) \\ &|\det a_1|_\mathbb{A}^{-s} \eta(k_2, k_3) da_1 da_3 dn_{\tilde{Q}} dn_Q dk_3 dk_2 dk_1, \quad x \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A}), \quad \tilde{x} \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

alors $\Phi_{\tilde{Q}, s} \in C_c^\infty((H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})) \times (H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})))$.

Notons que l'application

$$\tilde{Q} \supseteq \tilde{P} \mapsto M_{\tilde{Q}} \cap \tilde{P}$$

définit une bijection entre les sous-groupes paraboliques relativement standards de \tilde{G} contenus dans \tilde{Q} et les sous-groupes paraboliques semi-standards de $M_{\tilde{Q}}$ contenant $B \cap M_Q$. Soit donc $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$ et soient $\{\chi_{\tilde{Q}}\} \in \mathcal{X}^{M_{Q,E} \times M_{\tilde{Q},E}}$ qui s'envoient sur χ par l'application naturelle $\mathcal{X}^{M_{Q,E} \times M_{\tilde{Q},E}} \rightarrow \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$. En utilisant le lemme 1.3, on s'aperçoit que pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}}, B)$ contenu dans \tilde{Q} , tous $x, y \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})$ et tous $\tilde{x}, \tilde{y} \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_{\tilde{Q}}} k_{\Phi_{\tilde{Q}, s}, M_{\tilde{Q}} \cap \tilde{P}, \chi_{\tilde{Q}}}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) &= \int_{K_E} \int_K \int_{\tilde{K}} \int_{(A^{st, \infty})^2} e^{-\rho_{Q,E}(H_{Q,E}(x a_1 y)) - \rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q},E}(\tilde{x} a_3 \tilde{y}))} \\ &k_{\Phi, \tilde{P}, \chi}(x k_1, \tilde{x} k_1, a_1 y k_2, a_3 \tilde{y} k_3) \eta(k_2, k_3) |\det a_1|_\mathbb{A}^{-s} da_1 da_3 dk_3 dk_2 dk_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.4 Comportement en T

On démontre la proposition suivante.

Proposition 3.7. Soient $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$, $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $s, s' \in \mathbb{C}$, $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$ et $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. Alors

$$I_\chi^T(s, s', \Phi) = \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_0, B)} p_{\tilde{Q}, s+s'}(T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}}) e^{\rho_{\tilde{Q}, s+s'}(T'_{\tilde{Q}})} I_\chi^{M_{\tilde{Q}}, T'}(s, s', \Phi_{\tilde{Q}, s})$$

où pour un sous-groupe parabolique \tilde{Q} relativement standard de \tilde{G} , la fonction $p_{\tilde{Q}, s}$ est définie dans le lemme 3.5 dans le paragraphe 3.2 où $\rho_{\tilde{Q}, s} \in (\mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}})^*$ est aussi défini, la distribution $I_\chi^{M_{\tilde{Q}}, T'}$ est définie dans le paragraphe 3.3 et $\Phi_{\tilde{Q}, s} \in C_c^\infty((H_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})) \times (H_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})))$ est définie par (3.15) dans le même paragraphe.

Démonstration. Fixons un $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et soit $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. En utilisant la relation (1.4) dans la définition du noyau $k_{\Phi, \chi}^T$ (3.1) avec $P = \tilde{P}$, $H = H_{\tilde{P}}(\delta_2 h) - T'_{\tilde{P}}$ et $X = T_{\tilde{P}} - T'_{\tilde{P}}$ pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_0, B)$ et tout $\delta_2 \in P(F) \backslash G(F)$ on a que $I_\chi^T(s, s', \Phi)$ égale la somme sur $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_0, B)$ de

$$\int_{Q(E) \backslash G_E(\mathbb{A})} \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})} \int_{\tilde{Q}(F) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(h) - T'_{\tilde{Q}}, T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}}) \sum_{\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in P(E) \backslash Q(E) \\ \delta_2 \in P(F) \backslash Q(F) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(F) \backslash \tilde{Q}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h) - T'_{\tilde{P}}) \\ k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 g, \delta_1 g, \delta_2 h, \delta_3 \tilde{h}) | \det g|_{\mathbb{A}}^s | \det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg. \quad (3.17)$$

Écrivons maintenant $g = n_1 a_1 m_1 k_1$, $h = n_2 a_2 m_2 k_2$ et $\tilde{h} = n_3 a_3 m_3 k_3$ selon les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} Q(E) \backslash G_E(\mathbb{A}) &= [N_{Q, E}] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_Q(E) \backslash (H_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q}, E}(\mathbb{A})) \times K_E, \\ Q(F) \backslash G(\mathbb{A}) &= [N_Q] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_Q(F) \backslash (H_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})) \times K, \\ \tilde{Q}(F) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}) &= [N_{\tilde{Q}}] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_{\tilde{Q}}(F) \backslash (H_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})) \times \tilde{K}. \end{aligned}$$

On obtient alors que (3.17) égale

$$\int_{[H_{\tilde{Q}, E}]^1 \times [G_{\tilde{Q}, E}]} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [G_{\tilde{Q}}]} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [\tilde{G}_{\tilde{Q}}]} \int_{(A_{\tilde{Q}}^{st, \infty})^3} \int_{K_E \times K \times \tilde{K}} \sum_{\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in (M_Q \cap P)(E) \backslash M_Q(E) \\ \delta_2 \in (M_Q \cap P)(F) \backslash M_Q(F) \\ \delta_3 \in (M_{\tilde{Q}} \cap \tilde{P})(F) \backslash M_{\tilde{Q}}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 m_2) - T'_{\tilde{P}}) \\ e^{-2(\rho_{Q, E}(H_Q(m_1 a_1)) + \rho_Q(H_Q(m_2 a_2)) + \rho_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(m_3 a_3)))} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_2 m_2) - T'_{\tilde{Q}}, T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}}) | \det a_1 m_1|_{\mathbb{A}}^s | \det a_2 m_2|_{\mathbb{A}}^{s'} \\ \eta(m_2 k_2, m_3 k_3) k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_2 m_2 a_2 k_2, \delta_3 m_3 a_3 k_3) dk_1 dk_2 dk_3 da_1 da_2 da_3 dm_1 dm_2 dm_3.$$

En utilisant le lemme 1.5 on voit que $k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_2 m_2 a_2 k_2, \delta_3 m_3 a_3 k_3)$ égale

$$e^{2\rho_{Q, E}(H_Q(a_1)) + 2\rho_{\tilde{Q}, E}(H_{\tilde{Q}}(a_1))} k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1^{-1} a_2 k_2, \delta_3 m_3 a_1^{-1} a_3 k_3)$$

Remarquons que $\rho_{\tilde{Q}, E} = 2\rho_{\tilde{Q}}$ et $\rho_{Q, E} = 2\rho_Q$. En faisant les changements de variable $a_1^{-1} a_3 \mapsto a_3$ et ensuite $a_2^{-1} a_1 \mapsto a_1^{-1}$ on trouve que

$$\int_{(A_{\tilde{Q}}^{st, \infty})^2} e^{2\rho_{\tilde{Q}, E}(H_{\tilde{Q}}(a_1)) - 2\rho_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_3))} k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1^{-1} a_2 k_2, \delta_3 m_3 a_1^{-1} a_3 k_3) | \det a_1|_{\mathbb{A}}^s da_3 da_1$$

égale

$$\int_{(A_{\tilde{Q}}^{st,\infty})^2} e^{\rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q}}(a_2)-H_{\tilde{Q}}(a_1))-2\rho_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_3))} k_{\tilde{P},\chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1 k_2, \delta_3 m_3 a_3 k_3) |\det a_2 a_1^{-1}|_{\mathbb{A}}^s da_3 da_1.$$

En vertu du lemme 3.5 2), l'intégration par rapport à da_2 devient

$$\int_{A_{\tilde{Q}}^{st,\infty}} e^{((s+s') \det + 2\rho_{\tilde{Q}} - 2\rho_Q)(H_{\tilde{Q}}(a_2))} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_2 m_2) - T'_{\tilde{Q}}, T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}}) da_2 = \\ |\det m_2|^{s_{\tilde{Q}}+s'_{\tilde{Q}}} e^{\rho_{\tilde{Q},s+s'}(T'_{\tilde{Q}})} p_{\tilde{Q},s+s'}(T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}}).$$

Le reste d'intégration c'est alors $e^{\rho_{\tilde{Q},s+s'}(T'_{\tilde{Q}})} p_{\tilde{Q},s+s'}(T_{\tilde{Q}} - T'_{\tilde{Q}})$ fois

$$\int_{[H_{\tilde{Q},E}]^1 \times [G_{\tilde{Q},E}]^1} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [G_{\tilde{Q}}]^1} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [\tilde{G}_{\tilde{Q}}]^1} \int_{(A_{\tilde{Q}}^{st,\infty})^2} \int_{K_E \times K \times \tilde{K}} \sum_{\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in (M_Q \cap P)(E) \setminus M_Q(E) \\ \delta_2 \in (M_Q \cap P)(F) \setminus M_Q(F) \\ \delta_3 \in (M_{\tilde{Q}} \cap \tilde{P})(F) \setminus M_{\tilde{Q}}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 m_2) - T_{\tilde{P}}) \\ e^{-\rho_{Q,E}(H_Q(m_1 a_1 m_2) - \rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q}}(m_1 a_3 m_3)))} |m_1|_{\mathbb{A}}^s |m_2|_{\mathbb{A}}^{s'+s'_{\tilde{Q}}+s_{\tilde{Q}}} \eta(m_2, m_3) \eta(k_2, k_3) |\det a_1|_{\mathbb{A}}^{-s} \\ k_{\tilde{P},\chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1 k_2, \delta_3 m_3 a_3 k_3) dk_1 dk_2 dk_3 da_1 da_3 dm_1 dm_2 dm_3$$

où on utilise le fait que $\rho_{Q,E}(H_Q(m_1)) = \rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q}}(m_1))$ si $m_1 \in H_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})$. En utilisant la discussion du paragraphe 3.3, l'équation (3.16) en l'occurrence, on trouve que l'expression ci-dessus égale $I_{\chi}^{M_{\tilde{Q}},T}(s, s', \Phi_{\tilde{Q},s})$ où $\Phi_{\tilde{Q},s}$ est définie par (3.15), ce qui termine la preuve de la proposition. \square

En utilisant la proposition 3.7 démontrée ci-dessus et le lemme 3.5 qui décrit les fonctions $p_{\tilde{Q}}$ explicitement on obtient le comportement en T de la distribution I_{χ}^T .

Théorème 3.8. Soient $\Phi \in C_c^{\infty}((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ et $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$. La fonction $T \mapsto I_{\chi}^T(s, s', \Phi)$ où $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$, $s, s' \in \mathbb{C}$ et T parcourt $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ est un polynôme-exponentielle. De plus, si $s + s' \neq -1, 1$ sa partie purement polynomiale est constante et donnée par

$$I_{\chi}(s, s', \Phi) := \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_0, B)} (-1)^{d_{\tilde{Q}}} j_{\tilde{Q}}^{-1} \hat{\theta}_{\tilde{Q}}(\rho_{\tilde{Q},s+s'})^{-1} e^{\rho_{\tilde{Q},s+s'}(T'_{\tilde{Q}})} I_{\chi}^{M_{\tilde{Q}},T'}(s, s', \Phi_{\tilde{Q},s})$$

pour tout $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. En particulier, la distribution I_{χ} ne dépend pas de T' .

Remarque 3.9. Soit \tilde{Q} un sous-groupe parabolique relativement standard de \tilde{G} . Par le même raisonnement que dans la proposition 3.7 on obtient que pour tous $s, s' \in \mathbb{C}$ la distribution $I_{\chi}^{M_{\tilde{Q}},T}(s, s', \cdot)$ définie dans le paragraphe 3.3, est un polynôme-exponentielle en T qui ne dépend pas de $T_{\tilde{Q}} \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$. Cependant, si $\tilde{Q} \neq \tilde{G}$ le terme purement polynomial n'est pas constant.

3.5 Équivariance

Soient $\Phi \in C_c^{\infty}((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$, $x \in G_E(\mathbb{A})$ et $(y, \tilde{y}) \in G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A})$. Notons $\Phi^{x,(y,\tilde{y})} \in C_c^{\infty}((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ la fonction définie par $\Phi^{x,(y,\tilde{y})}(g, \tilde{g}) = \Phi(xgy^{-1}, x\tilde{g}\tilde{y}^{-1})$.

Soit $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$. On voit que $I_\chi^T(s, s', \Phi^{x, (y, \tilde{y})})$ pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $s, s' \in \mathbb{C}$ égale

$$\int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} \sum_{\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in P(E) \setminus G(E) \\ \delta_2 \in P(F) \setminus G(F) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(F) \setminus \tilde{G}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h y) - T_{\tilde{P}}) k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 g, \delta_1 g, \delta_2 h, \delta_3 \tilde{h}) \\ |\det gx|_{\mathbb{A}}^s |\det hy|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(hy, \tilde{h}\tilde{y}) d\tilde{h} dhdg.$$

Pour $h \in G(\mathbb{A})$ et $P \in \mathcal{F}(B)$ soit $k_P(h)$ un élément de K tel que $hk_P(h)^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Alors, en utilisant l'égalité (1.4) on a pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$:

$$\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h y) - T_{\tilde{P}}) = \sum_{\tilde{Q} \supseteq \tilde{P}} (-1)^{d_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h) - T_{\tilde{P}}) \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(\delta_2 h) - T_{\tilde{Q}}, -H_{\tilde{Q}}(k_Q(\delta_2 h)y))$$

d'où on obtient que $I_\chi^T(s, s', \Phi^{x, (y, \tilde{y})})$ égale la somme sur $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ de

$$\int_{Q(E) \setminus G_E(\mathbb{A})} \int_{Q(F) \setminus G(\mathbb{A})} \int_{\tilde{Q}(F) \setminus \tilde{G}(\mathbb{A})} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(h) - T_{\tilde{Q}}, -H_{\tilde{Q}}(k_Q(h)y)) \sum_{\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in (P \cap M_Q)(E) \setminus M_Q(E) \\ \delta_2 \in (P \cap M_Q)(F) \setminus M_Q(F) \\ \delta_3 \in (\tilde{P} \cap M_{\tilde{Q}})(F) \setminus M_{\tilde{Q}}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 h) - T_{\tilde{P}}) k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 g, \delta_1 g, \delta_2 h, \delta_3 \tilde{h}) |\det gx|_{\mathbb{A}}^s |\det hy|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(hy, \tilde{h}\tilde{y}) d\tilde{h} dhdg. \quad (3.18)$$

Écrivons maintenant $g = n_1 a_1 m_1 k_1$, $h = n_2 a_2 m_2 k_2$ et $\tilde{h} = n_3 a_3 m_3 k_3$ selon les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} Q(E) \setminus G_E(\mathbb{A}) &= [N_{Q,E}] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_Q(E) \setminus (H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A}))) \times K_E, \\ Q(F) \setminus G(\mathbb{A}) &= [N_Q] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_Q(F) \setminus (H_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}))) \times K, \\ \tilde{Q}(F) \setminus \tilde{G}(\mathbb{A}) &= [N_{\tilde{Q}}] \times A_{\tilde{Q}}^{st, \infty} \times (M_{\tilde{Q}}(F) \setminus (H_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}))) \times \tilde{K}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(n_2 a_2 m_2 k_2) - T_{\tilde{Q}}, -H_{\tilde{Q}}(k_Q(n_2 a_2 m_2 k_2)y)) = \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_2) + H_{\tilde{Q}}(m_2) - T_{\tilde{Q}}, -H_{\tilde{Q}}(k_2 y)).$$

On fait les mêmes changements de variable que dans la preuve de la proposition 3.7. On obtient, grâce à la relation (1.21) et le lemme 3.5 2), que l'intégration par rapport à da_2 devient

$$\int_{A_{\tilde{Q}}^{st, \infty}} e^{((s+s') \det + 2\rho_{\tilde{Q}} - 2\rho_Q)(H_{\tilde{Q}}(a_2))} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(a_2) + H_{\tilde{Q}}(m_2) - T_{\tilde{Q}}, -H_{\tilde{Q}}(k_2 y)) da_2 = \\ |\det m_2|_{\mathbb{A}}^{s_{\tilde{Q}} + s'_{\tilde{Q}}} e^{\rho_{\tilde{Q}, s+s'}(T_{\tilde{Q}})} u_{\tilde{Q}, s+s', y}(k_2)$$

où

$$u_{\tilde{Q}, s, y}(k) = \int_{\mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}} e^{\rho_{\tilde{Q}, s}(H)} \Gamma'_{\tilde{Q}}(H, -H_{\tilde{Q}}(ky)) dH, \quad k \in K, \quad s \in \mathbb{C}$$

est une fonction continue de la variable $k \in K$ en vertu du lemme 1.1.

Le reste de l'intégration dans (3.18) c'est $e^{\rho_{\tilde{Q}, s+s'}(T_{\tilde{Q}})} |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y, \tilde{y})$ fois

$$\int_{[H_{\tilde{Q},E}]^1 \times [G_{\tilde{Q},E}]} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [G_{\tilde{Q}}]} \int_{[H_{\tilde{Q}}]^1 \times [G_{\tilde{Q}}]} \int_{(A_{\tilde{Q}}^{st, \infty})^2} \int_{K_E \times K \times \tilde{K}} \sum_{\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}} (-1)^{d_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}} \sum_{\substack{\delta_1 \in (P \cap M_Q)(E) \setminus M_Q(E) \\ \delta_2 \in (P \cap M_Q)(F) \setminus M_Q(F) \\ \delta_3 \in (\tilde{P} \cap M_{\tilde{Q}})(F) \setminus M_{\tilde{Q}}(F)}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 m_2) - T_{\tilde{P}}) \\ e^{-\rho_{Q_E}(H_Q(m_1 a_1 m_2) - \rho_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(m_1 a_3 m_3)))} |m_1|_{\mathbb{A}}^s |m_2|_{\mathbb{A}}^{s' + s'_{\tilde{Q}} + s_{\tilde{Q}}} \eta(m_2, m_3) \eta(k_2, k_3) |\det a_1|_{\mathbb{A}}^{-s} \\ u_{\tilde{Q}, s+s', y}(k_2) k_{\tilde{P}, \chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1 k_2, \delta_3 m_3 a_3 k_3) dk_1 dk_2 dk_3 da_1 da_3 dm_1 dm_2 dm_3. \quad (3.19)$$

Si l'on pose alors

$$\Phi_{\tilde{Q},s,s',y}(x,\tilde{x}) = \int_{K_E \times K \times \tilde{K}(N_Q \times N_{\tilde{Q}})_E(\mathbb{A})} \int_{(A_{\tilde{Q}}^{st,\infty})^2} e^{\rho_{Q,E}(H_{Q,E}(a_1x)) + \rho_{\tilde{Q},E}(H_{\tilde{Q}}(a_3\tilde{x}))} \Phi(k_1^{-1}a_1xn_Qk_2, k_1^{-1}a_3\tilde{x}n_{\tilde{Q}}k_3) \\ |\det a_1|_{\mathbb{A}}^{-s} u_{\tilde{Q},s+s',y}(k_2)\eta(k_2, k_3) da_1 da_3 dn_{\tilde{Q}} dn_Q dk_3 dk_2 dk_1,$$

où $x \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})$ et $\tilde{x} \in H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})$, on a bien $\Phi_{\tilde{Q},s,s',y} \in C_c^\infty((H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times G_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})) \times (H_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})^1 \times \tilde{G}_{\tilde{Q},E}(\mathbb{A})))$ et on voit, en se basant sur la discussion du paragraphe 3.3 et en utilisant le lemme 1.3 du paragraphe 1.7, que (3.19) c'est juste $I_\chi^{M_{\tilde{Q}},T}(s,s',\Phi_{\tilde{Q},s,s',y})$. On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Soient $x \in G_E(\mathbb{A})$, $(y,\tilde{y}) \in G(\mathbb{A}) \times \tilde{G}(\mathbb{A})$, $\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$ et $s,s' \in \mathbb{C}$. La distribution $I_\chi^T(s,s',\cdot)$ vérifie pour tout $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ la propriété suivante :*

$$I_\chi^T(s,s',\Phi^{x,(y,\tilde{y})}) - |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y,\tilde{y}) I_\chi^T(s,s',\Phi) = \\ |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y,\tilde{y}) \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}},B) \setminus \{\tilde{G}\}} e^{\rho_{\tilde{Q},s+s'}(T_{\tilde{Q}})} I_\chi^{M_{\tilde{Q}},T}(s,s',\Phi_{\tilde{Q},s,s',y})$$

où les distributions $I_\chi^{M_{\tilde{Q}},T}(s,s',\cdot)$ sont définies dans la section 3.3. En particulier, pour $s+s' \neq -1,1$ on a

$$I_\chi(s,s',\Phi^{x,(y,\tilde{y})}) = |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y,\tilde{y}) I_\chi^T(s,s',\Phi).$$

Démonstration. La formule pour la différence

$$I_\chi^T(s,s',\Phi^{x,(y,\tilde{y})}) - |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y,\tilde{y}) I_\chi^T(s,s',\Phi)$$

est claire après les calculs qu'on a faits. Si $s+s' \neq -1,1$, cette formule-ci démontre aussi l'équivariance de la distribution $I_\chi^T(s,s',\cdot)$, car si $\tilde{Q} \subsetneq \tilde{G}$, d'après la remarque 3.9, le terme $I_\chi^{M_{\tilde{Q}},T}(s,s',\Phi_{\tilde{Q},s,s',y})$ est un polynôme-exponentielle en T qui ne dépend pas de $T_{\tilde{Q}} \in \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}$. En outre, $\rho_{\tilde{Q},s+s'}$ est non-trivial sur $\mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}$ en vertu du lemme 3.4. Il en découle que l'expression $e^{\rho_{\tilde{Q},s+s'}(T_{\tilde{Q}})} I_\chi^{M_{\tilde{Q}},T}(s,s',\Phi_{\tilde{Q},s,s',y})$ n'a pas de terme constant dans ce cas et par conséquent les termes constants de $I_\chi^T(s,s',\Phi^{x,(y,\tilde{y})})$ et de $|\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det y|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(y,\tilde{y}) I_\chi^T(s,s',\Phi)$ coïncident. \square

3.6 Données cuspidales non-induites

Dans ce paragraphe on étudie la distribution I_χ pour des classes χ distinguées.

Soit H un F-groupe réductif quelconque. On dit que $\chi \in \mathcal{X}^H$ est non-induite si $\chi = \{(H,\sigma)\}$ où σ est une représentation cuspidale de $H(\mathbb{A})^1$.

Proposition 3.11. *Soient $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$, $\chi^{G_E} \in \mathcal{X}^{G_E}$ et $\chi^{\tilde{G}_E} \in \mathcal{X}^{\tilde{G}_E}$. Notons $\chi := \chi^{G_E} \times \chi^{\tilde{G}_E} \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}$.*

1) *Supposons que $\chi^{\tilde{G}_E}$ est non-induite. Alors, pour tous $s,s' \in \mathbb{C}$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$I_\chi^T(s,s',\Phi) = \int_{[G_E][G][\tilde{G}]} \int \int k_{\Phi,\chi}(g,g,h,\tilde{h}) |\det g|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h,\tilde{h}) d\tilde{h} dh dg = \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{Q}},B)} \\ \int_{[G_E]} \int_{Q(F) \backslash G(\mathbb{A})[\tilde{G}]} \int \tau_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{Q}}(h) - T) \Lambda_{m,3}^{\tilde{Q},T} k_{\Phi,\chi}(g,g,h,\tilde{h}) |\det g|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h,\tilde{h}) d\tilde{h} dh dg.$$

2) Supposons que χ^{G_E} est non-induite et que pour tout $(\widetilde{M}_E, \sigma) \in \chi^{\widetilde{G}_E}$ le sous-groupe de Levi \widetilde{M}_E ne stabilise aucune droite. Alors, pour tous $s, s' \in \mathbb{C}$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a

$$I_\chi^T(s, s', \Phi) = \int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\widetilde{G}]} k_{\Phi, \chi}(g, g, h, \tilde{h}) |\det g|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg = \\ \int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\widetilde{G}]} \Lambda_{d,12}^T k_{\Phi, \chi}(g, g, h, \tilde{h}) |\det g|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg.$$

En plus, si $s + s' \neq -1, 1$, dans les deux cas ci-dessus on a $I_\chi(s, s', \Phi) = I_\chi^T(s, s', \Phi)$ pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$.

Démonstration. Démontrons le point 1). Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$. On a alors $k_{\Phi, \tilde{P}, \chi} \equiv 0$ si $\tilde{P} \neq \tilde{G}$ donc $k_{\Phi, \tilde{P}, \chi} = k_{\Phi, \tilde{P}, \chi}^T$ et la première égalité découle du théorème 3.1. Pour la deuxième égalité, on applique la formule d'inversion donnée par le lemme 2.4 pour l'opérateur $\Lambda_{m,3}^T$ ce qui donne formellement l'égalité voulue. La convergence découle de la preuve du théorème 3.1, où l'expression (3.3) est un cas particulier des intégrales considérées.

Démontrons le point 2). Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et $P = G \cap \tilde{P}$. Si $P \neq G$, on a $k_{\Phi, \tilde{P}, \chi} \equiv 0$ car χ^{G_E} est non-induite. Supposons donc que $P = G$. Si $\tilde{P} \neq \tilde{G}$ on a que $M_{\tilde{P}}$ stabilise la droite D_0 . La condition imposée sur $\chi^{\tilde{G}_E}$ implique alors $k_{\Phi, \tilde{P}, \chi} \equiv 0$. On obtient alors la première égalité. Pour la deuxième, on utilise la formule d'inversion donnée dans le lemme 2.7 et l'on obtient que $I_\chi^T(s, s', \Phi)$ égale la somme sur $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ de

$$\int_{P(E) \setminus G_E(\mathbb{A})} \int_{[G]} \int_{[\widetilde{G}]} \tau_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(g) - T) \Lambda_{d,12}^{\tilde{P}, T} k_{\Phi, \chi}(g, g, h, \tilde{h}) |\det g|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dh dg.$$

La convergence des intégrales découle de nouveau de la convergence de l'expression (3.3) du théorème 3.1. Soit donc $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et $P = \tilde{P} \cap G$. Si $P \neq G$ la fonction $[G_E] \ni g \mapsto \Lambda_{d,12}^{\tilde{P}, T} k_{\Phi, \chi}(g, \cdot, \cdot, \cdot)$ est nulle par hypothèse sur χ^{G_E} . Si $P = G$ et $\tilde{P} \neq \tilde{G}$ le groupe $M_{\tilde{P}}$ stabilise la droite D_0 et $[\widetilde{G}_E] \ni \tilde{g} \mapsto \Lambda_{d,12}^{\tilde{P}, T} k_{\Phi, \chi}(\cdot, \tilde{g}, \cdot, \cdot) \equiv 0$ d'où le résultat.

Si $s + s' \neq -1, 1$ on voit que $I_\chi^T(s, s', \Phi)$ ne dépend pas de T dans les deux cas qu'on a considéré, donc c'est bien $I_\chi(s, s', \Phi)$. \square

4 Le côté spectral de la formule des traces pour les groupes unitaires

4.1 Convergence du noyau spectral tronqué

On démontre le théorème 4.1 dans ce paragraphe. La preuve est similaire à celle du théorème 3.1 et sera donc un peu moins détaillée.

Soient $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$, $k = k_F$ son noyau automorphe. Pour un sous-groupe parabolique standard P de U , $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$, $x, y \in N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A})$ et $\tilde{x}, \tilde{y} \in N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})M_{\tilde{P}}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A})$ posons

$$k_{P, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = k_{F, P, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = k_{F, P \times \tilde{P}, \chi}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$$

où on utilise le fait que pour tout sous-groupe parabolique $P \supseteq P_0$ il existe un unique $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ tel que $\tilde{P} \cap U = P$, comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe 2.1.

On pose alors pour $x, y \in U(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A})$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}(\mathbb{F}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_0$

$$k_\chi^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = k_{F, \chi}^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in P(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{F})} k_{F, P, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 \tilde{x}, \delta_2 y, \delta_2 \tilde{y}) \hat{\tau}_P(H_P(\delta_2 y) - T). \quad (4.1)$$

Théorème 4.1. *On a pour tout $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}} \int_{[U \times U]} |k_{F,\chi}^T(x, x, y, y)| dx dy < \infty. \quad (4.2)$$

Démonstration. En raisonnant comme au début de la preuve du théorème 3.1 on trouve un $T_F \in \mathfrak{a}_0$ qui ne dépend que du support de F tel que si l'on pose $T' = T + T_F$ on a que $k_{F,\chi}^T(x, x, y, y)$ égale :

$$\sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P^U} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in P(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{F})} k_{P,\chi}(\delta_1 x, \delta_1 x, \delta_2 y, \delta_2 y) \hat{\tau}_P(H_P(\delta_1 x) - T') \hat{\tau}_P(H_P(\delta_2 y) - T).$$

En particulier, en vertu du lemme 1.8 *ii*) les sommes dans la définition de $k_{F,\chi}^T$ sont finies et la fonction est bien définie.

Les fonctions $P(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{A}) \times \tilde{P}(\mathbb{F}) \setminus \tilde{U}(\mathbb{A}) \ni (x, \tilde{x}) \mapsto k_{F,P,\chi}(x, \tilde{x}, \cdot, \cdot)$ et $(y, \tilde{y}) \mapsto k_{F,P,\chi}(\cdot, \cdot, y, \tilde{y})$ égalent ses termes constants le long de $P \times \tilde{P}$. En utilisant alors le lemme 2.7 (sa version pour les groupes unitaires) et ensuite le lemme 1.7 *i*) on trouve que l'intégrale (4.2) est majorée par la somme sur $P_1 \subseteq P_3$ et $P_2 \subseteq P_4$ de

$$\int_{P_1(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{A})} \int_{P_2(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{A})} \sigma_1^3(H_1(x) - T') \sigma_2^4(H_2(y) - T) |\Lambda_{d,12}^{T',P_1} \Lambda_{d,34}^{T,P_2} \left(\sum_{Q_1 \subseteq P \subseteq Q_2} (-1)^{d_P} k_{P,\chi}(x, x, y, y) \right)| dy dx$$

où Q_1 c'est le plus petit sous-groupe parabolique standard de U contenant $P_1 \cup P_2$ et $Q_2 = P_3 \cap P_4$. On les fixe désormais. L'intégrale ci-dessus égale aussi

$$\int_{P_1(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{A})} \int_{P_2(\mathbb{F}) \setminus U(\mathbb{A})} \sigma_1^3(H_1(x) - T') \sigma_2^4(H_2(y) - T) |\Lambda_{d,12}^{T',P_1} \Lambda_{d,34}^{T,P_2} \left(\sum_{Q_1 \subseteq P \subseteq Q_2} (-1)^{d_P} \int_{[N_1]} \int_{[N_2]} k_{P,\chi}(n_1 x, x, y, n_2 y) dn_2 dn_1 \right)| dy dx. \quad (4.3)$$

Pour tout P entre Q_1 et Q_2 , en utilisant le corollaire 1.9 et la décomposition de Bruhat, on a

$$\int_{[N_1]} \int_{[N_2]} k_{P,\chi}(n_1 x, x, y, n_2 y) dn_2 dn_1 = \sum_{\substack{s \in \Omega^2 \setminus \Omega^P / \Omega^1 \\ \tilde{s} \in \Omega^1 \setminus \Omega^{\tilde{P}} / \Omega^2}} \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \setminus P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \setminus \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(x, w_s^{-1} \tilde{\gamma} x, w_s^{-1} \gamma y, y).$$

Posons

$$(\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' = \Omega^{\tilde{P}} \setminus \bigcup_{Q_1 \subseteq R \subsetneq P} \Omega^{\tilde{R}}$$

et $(\Omega_{\tilde{Q}_1, U}^{\tilde{P}})' = (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' \cap \Omega^U$. Notons que $(\Omega_{\tilde{Q}_1, U}^{\tilde{P}})' = \Omega^P \setminus \bigcup_{Q_1 \subseteq R \subsetneq P} \Omega^R$. Alors $(\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})'$ (resp. $(\Omega_{\tilde{Q}_1, U}^{\tilde{P}})'$) est $\Omega^{\tilde{1}}$ -stable (resp. Ω^2 -stable) à gauche et $\Omega^{\tilde{2}}$ -stable (resp. Ω^1 -stable) à droite. On a alors les décompositions en parties disjointes suivantes

$$\Omega^{\tilde{P}} = \coprod_{Q_1 \subseteq R \subseteq P} (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})' \quad \Omega^P = \coprod_{Q_1 \subseteq R \subseteq P} (\Omega_{\tilde{Q}_1, U}^{\tilde{P}})'.$$

Pour $\tilde{s} \in \Omega^{\tilde{Q}_2}$ soit $\hat{\Delta}_{\tilde{s}}^{\tilde{Q}_1} = \{\varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_1} | \tilde{s} \varpi = \varpi\}$. Alors $\tilde{s} \in (\Omega_{\tilde{Q}_1}^{\tilde{P}})'$ si et seulement si $\hat{\Delta}_{\tilde{s}}^{\tilde{Q}_1} = \hat{\Delta}_{\tilde{P}}$. Par un argument classique basé sur l'identité (1.19) on a que l'expression entre la valeur absolue dans (4.3) égale

$$\Lambda_{d,12}^{T',P_1} \Lambda_{d,34}^{T,P_2} \left(\sum_{(s,\tilde{s}) \in \Omega_{\tilde{Q}_1}'} \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \setminus P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \setminus \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(x, w_s^{-1} \tilde{\gamma} x, w_s^{-1} \gamma y, y) \right)$$

où

$$\Omega'_{\tilde{Q}_1} = \{(s, \tilde{s}) \in (\Omega^2 \setminus \Omega^{Q_2} / \Omega^1) \times (\Omega^{\tilde{1}} \setminus \Omega^{\tilde{Q}_2} / \Omega^{\tilde{2}}) | \hat{\Delta}_{\tilde{Q}_2} = \hat{\Delta}_s^{\tilde{Q}_1} \cap \hat{\Delta}_{\tilde{s}}^{\tilde{Q}_1}\}.$$

Écrivons maintenant $x = n_1 a_1 m_1 k_1$, $y = n_2 a_2 m_2 k_2$ et selon les décompositions suivantes :

$$P_1(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A}) = [N_1] \times A_1^\infty \times [M_1]^1 \times K, \quad P_2(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A}) = [N_2] \times A_2^\infty \times [M_2]^1 \times K.$$

Supposons que F est invariante à droite par un compact $K_0 \subseteq (U \times \tilde{U})(\mathbb{A}_f)$. Comme il est expliqué dans [Art80] entre les pages 93 et 94, pour $(x, \tilde{x}), (y, \tilde{y}) \in (U \times \tilde{U})(\mathbb{A})$ et $(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}$ fixés les fonctions

$$\begin{aligned} P_1(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A}) \ni x_1 &\mapsto \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \backslash P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \backslash \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(x_1 a_1 k_1, w_s^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{x}, w_s^{-1} \gamma y, \tilde{y}), \\ \tilde{P}_2(\mathbb{F}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A}) \ni \tilde{x}_2 &\mapsto \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \backslash P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \backslash \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(x, w_s^{-1} \tilde{\gamma} \tilde{x}, w_s^{-1} \gamma y, \tilde{x}_2 a_2 k_2) \end{aligned}$$

sont invariantes à droite par l'intersection du compact ouvert $\bigcap_{k \in K} (k K_0 k^{-1})$ avec $M_1(\mathbb{A}_f)$ et $M_2(\mathbb{A}_f)$ respectivement. On applique alors la version pour les groupes unitaires de la proposition 2.8 pour les opérateurs $\Lambda_{d,12}^{T',P_1}$ et $\Lambda_{d,34}^{T,P_2}$. On trouve donc que pour tout $r_1, r_2 \geq 0$ il existe un nombre fini des opérateurs différentiels X, Y tels que l'expression 4.3 est majorée par la somme sur les X, Y de

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_1} \int_{\mathcal{M}_2} \sup_{\substack{(m'_1, m'_2) \in (M_1 \times M_2)(\mathbb{A})^1 \\ (m'_2, m'_2) \in (M_2 \times M_2)(\mathbb{A})^1}} (\|m'_1\| \|m'_1\| \|m'_2\| \|m'_2\|)^{-r_1} \sum_{\chi} \int_{K \times K} \int_{A_1^\infty} \int_{A_2^\infty} \int_{[N_1]} \int_{[N_2]} \\ &\quad \sigma_1^3(H_1(a_1) - T') \sigma_2^4(H_2(a_2) - T) e^{-2\rho_1(H_1(a_1)) - 2\rho_2(H_2(a_2))} \sum_{(s, \tilde{s}) \in \Omega'} \\ &\quad \left| \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \backslash P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \backslash \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{F_{X,Y}, P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(a_1 m'_1 k_1, w_s^{-1} \tilde{\gamma} n_1 a_1 m'_1 k_1, w_s^{-1} \gamma n_2 a_2 m'_2 k_2, a_2 m'_2 k_2) \right| \\ &\quad dn_2 dn_1 da_2 da_1 dk_2 dk_1) (\|m_1\| \|m_2\|)^{-r_2} dm_2 dm_1 \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_1 = \mathfrak{S}_{P_0}^{M_1 \cap P_0} \cap M_1(\mathbb{A})^1$, $\mathcal{M}_2 = \mathfrak{S}_{P_0}^{M_2 \cap P_0} \cap M_2(\mathbb{A})^1$ et l'on a remplacé la fonction F par $F_{X,Y} := X * F * Y$ grâce à la formule (1.15) et en utilisant le même raisonnement que sur la page 104 de [Art80]. Remarquons que le support de $F_{X,Y}$ est contenu dans celui de F .

Lemme 4.2. *Avec la notation ci-dessus, il existe des constantes positives $c, N > 0$ telles que si pour un $(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}$ on a*

$$\begin{aligned} &\sigma_1^3(H_1(a_1) - T') \sigma_2^4(H_2(a_2) - T) \\ &\quad \left| \sum_{\substack{\gamma \in (P_2 \cap s P_1)(\mathbb{F}) \backslash P_2(\mathbb{F}) \\ \tilde{\gamma} \in (\tilde{P}_1 \cap \tilde{s} \tilde{P}_2)(\mathbb{F}) \backslash \tilde{P}_1(\mathbb{F})}} k_{F_{X,Y}, P_1 \times \tilde{P}_2, \chi}(a_1 m'_1 k_1, w_s^{-1} \tilde{\gamma} n_1 a_1 m'_1 k_1, w_s^{-1} \gamma n_2 a_2 m'_2 k_2, a_2 m'_2 k_2) \right| \neq 0 \end{aligned}$$

alors

$$\|a_1\|, \|a_2\| \leq c (\|m'_1\| \|m'_2\|)^N.$$

Démonstration. Le même raisonnement qu'au début de la preuve du lemme 3.2 montre qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\varpi(H_1(a_1)) - s\varpi(H_2(a_2)) \leq C'(1 + \log(\|m'_2\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_1, \quad (4.4)$$

$$\varpi(H_2(a_2)) - \tilde{s}\varpi(H_1(a_1)) \leq C'(1 + \log(\|m'_1\|)), \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{\tilde{2}}. \quad (4.5)$$

Puisque les éléments de $\widehat{\Delta}_1$ égales ceux de $\widehat{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ à 1/2-près on remplace les inégalités (4.4) par

$$\varpi(H_1(a_1)) - s\varpi(H_2(a_2)) \leq C''(1 + \log(\|m'_2\|)), \quad \forall \varpi \in \widehat{\Delta}_{\tilde{\gamma}}. \quad (4.6)$$

pour une constante $C'' > 0$.

On est en mesure d'appliquer le corollaire A.5 de l'appendice A. On l'applique pour les données suivantes. Pour le groupe G on prend \tilde{U} . Dans l'appendice A on fixe un sous-groupe parabolique minimal de \tilde{U} , on prend donc un $\tilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\tilde{U}, \min})$ contenant \tilde{P}_0 . Pour les groupes P_1, P_2, P_3, P_4 du corollaire on prend $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ et \tilde{P}_4 dans cet ordre. Pour les éléments H_1 et H_2 on prend $H_1(a_1)$ et $H_2(a_2)$ respectivement. Pour X_1 et X_2 on prend T'_1 et T_2 respectivement. Pour les éléments du groupe de Weyl on prend $s = s$ et $s' = \tilde{s}$. La condition $(s, \tilde{s}) \in \Omega'_{\tilde{Q}_1}$ dit qu'ils vérifient la condition (A.18) du corollaire A.5. Les inégalités du corollaire A.5 correspondent aux inégalités qu'on a construit de façon suivant :

$$(A.19) \leftrightarrow (4.6), \quad (A.20) \leftrightarrow (4.5).$$

Les inégalités déterminent les constantes M_1, M_2, M_3 et M_4 . Grâce au corollaire A.5 et la propriété (1.13) de la hauteur on conclut la preuve du lemme 3.2. \square

La suite de la preuve est maintenant complètement analogue à la partie de la preuve du théorème 3.1 qui suit la preuve du lemme 3.2. \square

4.2 Polynômes-exponentielles

On utilisera le langage du paragraphe 3.2.

Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ de U on pose $\underline{\rho}_Q := 2\rho_{\tilde{Q}} - 2\rho_Q \in \mathfrak{a}_Q^* = \mathfrak{a}_{\tilde{Q}}^*$ (on rappelle qu'un sous-groupe parabolique standard Q de U définit le sous-groupe parabolique relativement standard \tilde{Q} uniquement). On a alors le résultat suivant démontré dans [Zyd15b], lemme 4.2.

Lemme 4.3. *Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U . Alors, pour tout $\varpi^\vee \in \widehat{\Delta}_Q^\vee$ on a $\underline{\rho}_Q(\varpi^\vee) > 0$.*

Le polynôme-exponentielle en question est donné par le lemme suivant.

Lemme 4.4 (cf. [Zyd15b], lemme 4.3). *Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U . Alors, pour tout $R \supseteq Q$ il existe un polynôme $P_{Q,R}$ de degré au plus d_Q sur \mathfrak{a}_R tel que la fonction*

$$p_Q(X) := \int_{A_Q^\infty} e^{\underline{\rho}_Q(H_Q(a))} \Gamma'_Q(H_Q(a), X) da, \quad X \in \mathfrak{a}_Q$$

égale

$$\sum_{R \supseteq Q} e^{\underline{\rho}_R(X_R)} p_{Q,R}(X_R)$$

où $p_{Q,U}(X_U) = (-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}$. En particulier, la fonction p_Q est un polynôme-exponentielle dont le terme purement polynomial est constant et égale $(-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1}$.

4.3 Une généralisation du théorème 4.1

Dans le cas unitaire le théorème 4.1 dit que pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$, la distribution

$$C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A})) \ni F \mapsto J_\chi^T(F) := \int_{[U]} \int_{[U]} k_{F,\chi}^T(x, x, y, y) dx dy$$

est bien définie.

Soit $H = \prod_{i=1}^k \text{Res}_{E/F} \text{GL}_{n_i}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, \dots, k$. Soient aussi $U' = U(V', \Phi')$ et $\tilde{U} = U(W', \tilde{\Phi}')$ un couple de groupes unitaires munis de l'inclusion $U' \hookrightarrow \tilde{U}'$ comme dans le paragraphe 1.10. On va généraliser le théorème 4.1 au cas de l'inclusion $H \times U' \hookrightarrow H \times \tilde{U}'$.

Fixons P_0 un sous-F-groupe parabolique minimal de $H \times U'$ et fixons aussi M_0 une partie de Levi de P_0 définie sur F . Notons $M_{\tilde{0}}$ le sous-F-groupe de Levi de $H \times \tilde{U}'$ contenant M_0 , minimal pour cette propriété. Alors, $M_{\tilde{0}}$ est uniquement déterminé par M_0 . Soit $P \in \mathcal{F}(P_0)$ un sous-groupe parabolique standard de $G \times U'$. Il résulte des discussions dans les paragraphes 1.10 et 1.11 qu'il existe un unique sous-groupe parabolique $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$ tel que $\tilde{P} \cap (H \times U') = P$. On le note justement \tilde{P} .

Pour une fonction $f \in C_c^\infty((H \times U')(\mathbb{A})^1 \times (H \times \tilde{U}')(\mathbb{A})^1)$, un sous-groupe parabolique standard P de $H \times U'$ et une donnée cuspidale $\chi \in \mathcal{X}^{(H \times U') \times (H \times \tilde{U}')}$ on pose

$$k_{f,P,\chi}(\tilde{x}, \tilde{y}) := k_{f,P \times \tilde{P}, \chi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in N_{P \times \tilde{P}}(\mathbb{A}) M_{P \times \tilde{P}}(F) \backslash (H \times U')(\mathbb{A})^1 \times (H \times \tilde{U}')(\mathbb{A})^1.$$

Pour un $T \in \mathfrak{a}_{P_0}^+$ on pose

$$k_{f,\chi}^T(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P^{H \times U'}} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in P(F) \backslash (H \times U')(F)} \hat{\tau}_P^{G \times U'}(H_P(\delta_2 y) - T) k_{f,P,\chi}(\delta_1 x, \delta_1 \tilde{x}, \delta_2 y, \delta_2 \tilde{y})$$

où $x, y \in [H \times U']^1$ et $\tilde{x}, \tilde{y} \in [H \times \tilde{U}']^1$.

Théorème 4.5. *Soit $f \in C_c^\infty((H \times U')(\mathbb{A})^1 \times (H \times \tilde{U}')(\mathbb{A})^1)$, alors pour tout $T \in \mathfrak{a}_{P_0}^+$ assez régulier on a*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{(H \times U') \times (H \times \tilde{U}')}} \int_{[H \times U']^1} \int_{[H \times \tilde{U}']^1} |k_{f,\chi}^T(x, x, y, y)| dx dy < \infty.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 4.1. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Notons alors pour $\chi \in \mathcal{X}^{(H \times U') \times (H \times \tilde{U}')}$ et $f \in C_c^\infty((H \times U')(\mathbb{A})^1 \times (H \times \tilde{U}')(\mathbb{A})^1)$

$$J_\chi^{H \times U', T}(f) = \int_{[H \times U']^1} \int_{[H \times \tilde{U}']^1} k_{f,\chi}^T(x, x, y, y) dx dy.$$

Revenons au groupe U . Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U . L'inclusion $M_Q \hookrightarrow M_{\tilde{Q}}$ vérifie alors les conditions de ce paragraphe.

Soit $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$, et $\{\chi'\} \subseteq \mathcal{X}^{M_Q \times M_{\tilde{Q}}}$ la préimage de χ par l'application naturelle $\mathcal{X}^{M_Q \times M_{\tilde{Q}}} \rightarrow \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ assez régulier on définit alors la distribution $J_\chi^{M_Q, T}(\cdot)$ sur $C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A})^1 \times M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1)$ par :

$$J_\chi^{M_Q, T}(f) = \sum_{\chi'} J_{\chi'}^{M_Q, T}(f),$$

où pour $\chi' \in \mathcal{X}^{M_Q \times M_{\tilde{Q}}}$, $J_{\chi'}^{M_{\tilde{Q}}, T}(\cdot)$ c'est la distribution associée à l'inclusion $M_Q \hookrightarrow M_{\tilde{Q}}$ décrite ci-dessus par rapport au sous-groupe de Levi minimal M_0 de M_Q et au sous-groupe parabolique minimal $P_0 \cap M_Q$ de M_Q .

Pour $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ on définit pour $x \in M_Q(\mathbb{A})^1$ et $\tilde{x} \in M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1$

$$F_Q(x, \tilde{x}) = \int_{K \times K} \int_{(N_Q \times N_{\tilde{Q}})(\mathbb{A})} \int_{A_Q^\infty} e^{2\rho_Q(H_Q(a_1))} F(k_1^{-1} a_1 x n_Q k_2, k_1^{-1} a_1 \tilde{x} n_{\tilde{Q}} k_2) da_1 dn_{\tilde{Q}} dn_Q dk_2 dk_1. \quad (4.7)$$

Alors $F_Q \in C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A})^1 \times M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1)$.

Notons que l'application

$$Q \supseteq P \mapsto M_Q \cap P$$

définit une bijection entre les sous-groupes paraboliques standards de U contenus dans Q et les sous-groupes paraboliques de M_Q contenant $P_0 \cap M_Q$. Soit donc $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$ et soient $\{\chi_Q\} \in \mathcal{X}^{M_Q \times M_{\tilde{Q}}}$ qui s'envoient sur χ par l'application naturelle $\mathcal{X}^{M_Q \times M_{\tilde{Q}}} \rightarrow \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. En utilisant le lemme 1.3, et en remarquant que si l'on écrit $2\rho_Q = (\rho_Q + \rho_{\tilde{Q}}) - (\rho_{\tilde{Q}} - \rho_Q)$ on a $-(\rho_Q + \rho_{\tilde{Q}}) - (\rho_{\tilde{Q}} - \rho_Q) = -2\rho_{\tilde{Q}}$, on s'aperçoit que pour tout $P \in \mathcal{F}(P_0)$ contenu dans Q , tous $x, y \in M_Q(\mathbb{A})^1$ et tous $\tilde{x}, \tilde{y} \in M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1$ on a

$$\sum_{\chi_Q} k_{F_Q, M_Q \cap P, \chi_Q}(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) = \int_{K \times K} \int_{A_Q^\infty} e^{-2\rho_{\tilde{Q}}(H_Q(a_1))} k_{F, P, \chi}(xk_1, \tilde{x}k_1, a_1 y k_2, a_1 \tilde{y} k_2) da_1 dk_2 dk_1. \quad (4.8)$$

4.4 Comportement en T

On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Soient $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$, $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$ et $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. Alors*

$$J_\chi^T(F) = \sum_{Q \supseteq P_0} p_Q(T_Q - T'_Q) e^{\rho_Q(T'_Q)} J_\chi^{M_Q, T'}(F_Q)$$

où pour un sous-groupe parabolique Q standard de U , la fonction p_Q est définie dans le lemme 4.4 dans le paragraphe 4.2 où $\rho_Q \in \mathfrak{a}_Q^*$ est aussi défini, la distribution $J_\chi^{M_Q, T'}$ est définie dans le paragraphe 4.3 et $F_Q \in C_c^\infty((M_Q \times M_{\tilde{Q}})(\mathbb{A})^1)$ est définie par (4.7) dans le même paragraphe.

Démonstration. Fixons un $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et soit $T \in T' + \mathfrak{a}_0^+$. En utilisant la relation (1.4) dans la définition du noyau $k_{F, \chi}^T$ (4.1) avec $P = P$, $H = H_P(\delta_2 y) - T'_P$ et $X = T_P - T'_P$ pour tout $P \in \mathcal{F}(P_0)$ et tout $\delta_2 \in P(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{F})$ on a que $J_\chi^T(F)$ égale la somme sur $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ de

$$\int_{Q(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A})} \int_{Q(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A})} \Gamma_Q(H_Q(y) - T'_Q, T_Q - T'_Q) \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in (P \cap M_Q)(\mathbb{F}) \backslash M_Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta_2 y) - T'_P) k_{P, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 x, \delta_2 y, \delta_2 y) dx dy. \quad (4.9)$$

Écrivons maintenant $x = n_1 a_1 m_1 k_1$ et $y = n_2 a_2 m_2 k_2$ selon la décomposition

$$Q(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A}) = [N_Q] \times A_Q^\infty \times [M_Q]^1 \times K.$$

On obtient alors que (4.9) égale

$$\int_{[M_Q]^1 \times [M_Q]^1} \int_{(A_Q^\infty)^2} \int_{K \times K} e^{-2\rho_Q(H_Q(a_1 a_2))} \Gamma'_Q(H_Q(a_2) - T'_Q, T_Q - T'_Q) \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in (P \cap M_Q)(\mathbb{F}) \backslash M_Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta_2 m_2) - T'_P) k_{P, \chi}(\delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_2 m_2 a_2 k_2, \delta_2 m_2 a_2 k_2) dk_1 dk_2 da_1 da_2 dm_1 dm_2.$$

En utilisant le lemme 1.5 on voit que $k_{P, \chi}(\delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_1 m_1 a_1 k_1, \delta_2 m_2 a_2 k_2, \delta_2 m_2 a_2 k_2)$ égale

$$e^{2(\rho_Q + \rho_{\tilde{Q}})(H_Q(a_1))} k_{P, \chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1^{-1} a_2 k_2, \delta_2 m_2 a_1^{-1} a_2 k_2).$$

En faisant le changement de variable $a_2^{-1}a_1 \mapsto a_1$ et en utilisant le lemme 4.4, on trouve que l'intégration par rapport à da_2 devient

$$\int_{A_Q^\infty} e^{2(\rho_{\tilde{Q}} - \rho_Q)(H_Q(a_2))} \Gamma'_Q(H_Q(a_2) - T'_Q, T_Q - T'_Q) da_2 = e^{\rho_Q(T'_Q)} p_Q(T_Q - T'_Q).$$

Le reste d'intégration c'est alors $e^{\rho_Q(T'_Q)} p_Q(T_Q - T'_Q)$ fois

$$\int_{[M_Q]^1 \times [M_Q]^1} \int_{(A_Q^\infty)^{K \times K}} \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in (P \cap M_Q)(F) \setminus M_Q(F)} \hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{P}}(\delta_2 m_2) - T_{\tilde{P}}) \\ e^{-2\rho_{\tilde{Q}}(H_Q(a_1))} k_{P, \chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1 k_2, \delta_2 m_2 a_1 k_2) dk_1 dk_2 da_1 dm_1 dm_2.$$

En utilisant la discussion du paragraphe 4.3, l'équation (4.8) en l'occurrence, on trouve que l'expression ci-dessus égale $J_\chi^{M_{\tilde{Q}}, T}(F_Q)$ où F_Q est définie par (4.7), ce qui termine la preuve de la proposition. \square

En utilisant la proposition 4.6 démontrée ci-dessus et le lemme 4.4 qui décrit les fonctions p_Q explicitement on obtient le comportement en T de la distribution J_χ^T .

Théorème 4.7. *Soient $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. La fonction $T \mapsto J_\chi^T(F)$ où T parcourt $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ est un polynôme-exponentielle dont la partie purement polynomiale est constante et donnée par*

$$J_\chi(F) := \sum_{Q \supseteq P_0} (-1)^{d_Q} \hat{\theta}_Q(\underline{\rho}_Q)^{-1} e^{\rho_Q(T'_Q)} J_\chi^{M_Q, T'}(F_Q)$$

pour tout $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. En particulier, la distribution J_χ ne dépend pas de T' .

Remarque 4.8. *Soit Q un sous-groupe parabolique standard de U . Par le même raisonnement que dans la proposition 4.6 on obtient que la distribution $J_\chi^{M_Q, T}$ définie dans le paragraphe 4.3, est un polynôme-exponentielle en T qui ne dépend pas de $T_Q \in \mathfrak{a}_Q$. Cependant, si $Q \neq U$ le terme purement polynomial n'est pas constant.*

4.5 Invariance

Soient $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et $g, h \in U(\mathbb{A})$. Notons $F^{g, h} \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ la fonction définie par $F^{g, h}(x, \tilde{x}) = F(gxh^{-1}, g\tilde{x}h^{-1})$.

Soit $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. On voit que $J_\chi^T(F^{g, h})$ pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ égale

$$\int_{[U]} \int_{[U]} \sum_{P \supseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in P(F) \setminus U(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta_2 y h) - T_P) k_{P, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 x, \delta_2 y, \delta_2 y) dx dy.$$

Pour $y \in U(\mathbb{A})$ et $P \in \mathcal{F}(P_0)$ soit $k_P(y)$ un élément de K tel que $yk_P(y)^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Alors, en utilisant l'égalité (1.4) on a :

$$\hat{\tau}_P(H_P(\delta_2 y h) - T_P) = \sum_{Q \supseteq P} (-1)^{d_Q} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta_2 y) - T_P) \Gamma'_Q(H_Q(\delta_2 y) - T_Q, -H_Q(k_Q(\delta_2 y)h))$$

d'où on obtient que $J_\chi^T(F^{g, h})$ égale la somme sur $Q \in \mathcal{F}(P_0)$ de

$$\int_{Q(F) \setminus U(\mathbb{A})} \int_{Q(F) \setminus U(\mathbb{A})} \Gamma'_Q(H_Q(y) - T_Q, -H_Q(k_Q(y)h)) \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in (P \cap M_Q)(F) \setminus M_Q(F)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta_2 y) - T_P) k_{P, \chi}(\delta_1 x, \delta_1 x, \delta_2 y, \delta_2 y) dx dy. \quad (4.10)$$

Écrivons maintenant $x = n_1 a_1 m_1 k_1$ et $y = n_2 a_2 m_2 k_2$ selon la décomposition

$$Q(\mathbb{F}) \backslash U(\mathbb{A}) = [N_Q] \times A_Q^\infty \times [M_Q]^1 \times K.$$

On a alors :

$$\Gamma'_Q(H_Q(n_2 a_2 m_2 k_2) - T_Q, -H_Q(k_Q(n_2 a_2 m_2 k_2)h)) = \Gamma'_Q(H_Q(a_2) - T_Q, -H_Q(k_2 h)).$$

On fait le même changement de variable que dans la preuve de la proposition 4.6. On obtient, en vertu du lemme 4.4, que l'intégration par rapport à da_2 devient :

$$\int_{A_Q^\infty} e^{\rho_Q(H_Q(a_2))} \Gamma'_Q(H_Q(a_2) - T_Q, -H_Q(k_2 h)) da_2 = e^{\rho_Q(T_Q)} u_{Q,h}(k_2)$$

où

$$u_{Q,h}(k) = \int_{\mathfrak{a}_Q} e^{\rho_Q(H)} \Gamma'_Q(H, -H_Q(kh)) dH, \quad k \in K$$

est une fonction continue de la variable $k \in K$ en vertu du lemme 1.1.

Le reste de l'intégration dans (3.18) c'est $e^{\rho_Q(T_Q)}$ fois

$$\begin{aligned} & \int_{[M_Q]^1} \int_{[M_Q]^1} \int_{A_Q^\infty} \int_{K \times \tilde{K}} \sum_{P \subseteq Q} (-1)^{d_P^Q} \sum_{\delta_1, \delta_2 \in (P \cap M_Q)(\mathbb{F}) \backslash M_Q(\mathbb{F})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta_2 y) - T_P) \\ & e^{-2\rho_{\tilde{Q}}(H_Q(a_1))} k_{P,\chi}(\delta_1 m_1 k_1, \delta_1 m_1 k_1, \delta_2 m_2 a_1 k_2, \delta_2 m_2 a_1 k_2) u_{Q,h}(k_2) dk_1 dk_2 da_1 dm_1 dm_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si l'on pose alors

$$\begin{aligned} F_{Q,h}(x, \tilde{x}) = & \int_{K \times \tilde{K}} \int_{(N_Q \times N_{\tilde{Q}})(\mathbb{A})} \int_{A_Q^\infty} e^{2\rho_Q(H_Q(a_1))} F(k_1^{-1} a_1 x n_Q k_2, k_1^{-1} a_1 \tilde{x} n_{\tilde{Q}} k_2) \\ & u_{\tilde{Q},h}(k_2) da_1 dn_{\tilde{Q}} dn_Q dk_2 dk_1, \quad x \in M_Q(\mathbb{A})^1, \tilde{x} \in M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \end{aligned}$$

on a bien $F_{Q,h} \in C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A})^1 \times M_{\tilde{Q}}(\mathbb{A})^1)$ et on voit, en se basant sur la discussion du paragraphe 4.3 et en utilisant le lemme 1.3 du paragraphe 1.7, que (4.11) c'est juste $J_\chi^{M_Q, T}(F_{Q,h})$. On trouve alors le théorème suivant.

Théorème 4.9. *Soient $g, h \in U(\mathbb{A})$ et $\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. La distribution $J_\chi^T(\cdot)$ vérifie pour tout $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ la propriété suivante :*

$$J_\chi^T(F^{g,h}) - J_\chi^T(F) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(P_0) \setminus \{U\}} e^{\rho_Q(T_Q)} J_\chi^{M_Q, T}(F_{Q,h})$$

où les distributions $J_\chi^{M_Q, T}$ sont définies dans la section 4.3. En particulier, on a

$$J_\chi(F^{g,h}) = J_\chi(F).$$

Démonstration. L'argument est complètement analogue à celui de la preuve du théorème 3.10 ci-dessus et repose sur le théorème 4.7, sa remarque 4.8 et la propriété des exposants ρ_Q donnée par le lemme 4.3. \square

4.6 Données cuspidales non-induites

Dans ce paragraphe on étudie la distribution J_χ pour des classes χ distinguées. On utilisera le langage du paragraphe 3.6.

Proposition 4.10. *Soient $F \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$, $\chi^U \in \mathcal{X}^U$ et $\chi^{\tilde{U}} \in \mathcal{X}^{\tilde{U}}$. Notons $\chi = \chi^U \times \chi^{\tilde{U}} \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}$. Supposons que χ^U ou $\chi^{\tilde{U}}$ est non-induite. Alors, pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$J_\chi(F) = J_\chi^T(F) = \int \int_{[U] [U]} k_{F,\chi}(x, x, y, y) dx dy = \int \int_{[U] [U]} \Lambda_{d,12}^T \Lambda_{d,34}^T k_{F,\chi}(x, x, y, y) dx dy.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{F}(P_0)$. Si $P \neq U$ on a $k_{F,P,\chi} \equiv 0$ d'où $k_{F,\chi} = k_{F,\chi}^T$ et les deux premières égalités découlent du théorème 4.1.

Démontrons la dernière égalité. En utilisant la formule du lemme 2.7 on trouve que $J_\chi(F)$ égale la somme sur $P, Q \in \mathcal{F}(P_0)$ de

$$\int_{P(F) \backslash U(\mathbb{A})} \int_{Q(F) \backslash U(\mathbb{A})} \tau_P(H_P(x) - T) \tau_Q(H_Q(y) - T) \Lambda_{d,12}^{P,T} \Lambda_{d,34}^{Q,T} k_{F,\chi}(x, x, y, y) dx dy.$$

La convergence absolue des intégrales découle de la convergence de l'expression (4.3) dans la preuve du théorème 4.1. Or, si $P \neq U$ ou $Q \neq U$ on a $\Lambda_{d,12}^{P,T} \Lambda_{d,34}^{Q,T} k_{F,\chi} \equiv 0$ par hypothèse sur χ , d'où le résultat. \square

4.7 Indépendance des choix

Soient $s, s' \in \mathbb{C}$ tels que $s + s' \neq 1$. Dans ce paragraphe on constate que les distributions $I_\chi(s, s', \cdot)$ et J_χ ne dépendent d'aucun choix, sauf le choix d'une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$, $G_E(\mathbb{A})$, $\tilde{G}(\mathbb{A})$, $\tilde{G}_E(\mathbb{A})$, $U(\mathbb{A})$, $\tilde{U}(\mathbb{A})$ et les choix des mesures sur les points adéliques des parties unipotentes $N_P(\mathbb{A})$ des F-sous-groupes paraboliques de tous les groupes en question, le choix étant que le volume $N_P(F) \backslash N_P(\mathbb{A})$ soit 1.

En effet, l'indépendance vient des théorèmes 3.8 et 4.7 et se démontre de même façon que dans le paragraphe 4.5 de [Zyd15b] ou bien le paragraphe 3.5 de [Zyd15a] où démontre la même propriété pour les distributions géométriques. Par exemple, pour démontrer l'invariance de la distribution $I_\chi(s, s', \cdot)$ du choix d'un sous-groupe de Levi minimal M_0 de G , on prend $\gamma \in G(F)$ et $M'_0 = \gamma M_0 \gamma^{-1}$ et on note $I_{M'_0, \chi}$ la distribution associée à M'_0 et les autres données conjugués par γ . À l'aide du théorème 3.8 on trouve donc que pour tout $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ on a $I_{M'_0, \chi}(s, s', \Phi) = I_\chi(s, s', \Phi^{\gamma, (\gamma, \gamma)})$ et le résultat suit du théorème 3.10 car $|\det \gamma|_{\mathbb{A}}^s |\det \gamma|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(\gamma, \gamma) = 1$.

5 Formule des traces relative de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires

5.1 Les invariants

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}_E = \text{Res}_{E/F}(\text{End}_E(W_E))$. On note dans ce paragraphe \mathbb{A}_E - la E-droite affine. Notons

$$Q : \tilde{\mathfrak{g}}_E \rightarrow \text{Res}_{E/F}(\mathbb{A}_E)^{2n+1} \quad (5.1)$$

l'application suivante : pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_E$ on a $Q(X) = (Q(X)_i)_{i=1, \dots, 2n+1}$ où $Q(X)_i = \text{Tr} \bigwedge^i X$ pour $i = 1, \dots, n+1$ et $Q(X)_i = e_0^*(X^{i-(n+1)} e_0)$ pour $i = n+2, \dots, 2n+1$ où $e_0^* \in \text{Res}_{E/F}(W_E^*)$ est définie par $e_0^*(V_E) = 0$ et $e_0^*(e_0) = 1$. Alors, Q est G_E -invariante pour l'action de G_E sur $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ par adjonction. Soit \mathcal{O} l'ensemble des sous-F-variétés de $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ définies comme des pré-images par

Q des points F -rationnels dans $\text{Res}_{E/F}(\mathbb{A}_E)^{2n+1}$. En particulier, à tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ on peut associer, et on le fait, un polynôme $P_{\mathfrak{o}} \in E[T]$ qui est le polynôme caractéristique commun à tous les éléments de \mathfrak{o} .

Pour tout $\xi \in E$ soit $\xi I \in \tilde{\mathfrak{g}}_E(F)$ l'homothétie de rapport le scalaire ξ . On note alors

$$D_{\xi} = \text{Res}_{E/F}(\{X \in \text{End}_E(W_E) \mid \det(X - \xi I) = 0\}).$$

Pour une sous- F -variété \mathcal{V} de $\tilde{\mathfrak{g}}_E$, par $\mathcal{V} \setminus D_{\xi}$ on entend toujours l'ouvert complément de $\mathcal{V} \cap D_{\xi}$ dans \mathcal{V} au sens de schémas algébriques. On a donc pour toute F -algèbre R :

$$(\mathcal{V} \setminus D_{\xi})(R) = \{X \in \mathcal{V}(R) \subseteq \text{End}_E(W_E)(E \otimes_F R) \mid \det(X - \xi I) \in (E \otimes_F R)^*\}.$$

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Remarquons que, puisque tous les éléments de \mathfrak{o} ont le même polynôme caractéristique, pour tout $\xi \in E$, on a soit $\mathfrak{o} \subseteq D_{\xi}$ soit $\mathfrak{o} \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_E \setminus D_{\xi}$.

Pour tout $\xi \in E$ on définit l'application, dite de Cayley, $\kappa_{\xi} : \tilde{\mathfrak{g}}_E \setminus D_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_E \setminus D_{\xi}$ de façon suivante :

$$\kappa_{\xi}(X) = -\xi(1 + X)(1 - X)^{-1}. \quad (5.2)$$

L'application κ_{ξ} a été introduite dans le contexte de la formule des traces relative de Jacquet-Rallis dans [Zha14b], section 3. Voici quelques-une des ses propriétés.

Lemme 5.1. *Soit $\xi \in E$.*

- 1) *L'application $\kappa_{\xi} : \tilde{\mathfrak{g}}_E \setminus D_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_E \setminus D_{\xi}$ définie par (5.2) ci-dessus est bien définie et est un isomorphisme des F -variétés algébriques son inverse étant $\kappa_{\xi}^{-1}(X) = -(\xi + X)(\xi - X)^{-1}$.*
- 2) *Pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ disjoint avec D_1 il existe un unique $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}$ disjoint avec D_{ξ} tel que la restriction de κ_{ξ} à \mathfrak{o} induit un isomorphisme entre \mathfrak{o} et \mathfrak{o}' .*

Démonstration. La première assertion découle du fait que κ_{ξ} est algébrique et du fait qu'en effet son inverse est donnée par la formule $X \mapsto -(\xi + X)(\xi - X)^{-1}$, ce qu'on vérifie facilement. La deuxième assertion c'est le lemme 3.5 de [Zha14b]. \square

Notons $\Gamma_{E/F}$ le groupe de Galois de l'extension E/F et soit σ son générateur. On considère à la fois $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ comme une variété contenant \tilde{G}_E et comme l'algèbre de Lie de \tilde{G}_E . Les deux points de vue sont complètement compatibles. Le groupe $\text{Gal}(E/F)$ agit sur la variété $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ grâce à son action naturelle sur $W_E = W \otimes_F E$. Pour $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_E$ on note donc $\overline{X} \in \tilde{G}_E$ défini pour tout $v \in W_E$ comme $\overline{X}v = \sigma(X\sigma(v))$. On a donc $\tilde{G} = \tilde{G}_E^{\Gamma_{E/F}}$. Soit S_W la sous- F -variété de \tilde{G}_E définie comme

$$S_W = \{g \in \tilde{G}_E \mid g\bar{g} = 1\}.$$

Alors S_W est une F -variété algébrique lisse isomorphe, en vertu du théorème de Hilbert 90, à l'espace homogène \tilde{G}_E/\tilde{G} via l'isomorphisme :

$$\tilde{G}_E/\tilde{G} \ni g \mapsto g\bar{g}^{-1} \in S_W.$$

Notons aussi \mathfrak{s}_W l'espace tangent à l'identité de S_W défini comme

$$\mathfrak{s}_W := \{X \in \tilde{\mathfrak{g}}_E \mid X + \overline{X} = 0\}.$$

Le groupe G agit sur S_W préservant l'identité par la restriction de son action par conjugaison sur \tilde{G}_E , il agit donc aussi sur \mathfrak{s}_W . Il est clair que pour tout $\xi \in E$, ces action préservent les sous-variétés $\tilde{G}_E \setminus D_{\xi}$ et $\mathfrak{s}_W \setminus D_1$. Notons $E^1 = \{\xi \in E \mid \xi\bar{\xi} = 1\}$. On a alors

Lemme 5.2 (cf. [Zha14b], lemme 3.4). *Pour tout $\xi \in E^1$ la restriction de l'application κ_{ξ} à $\mathfrak{s}_W \setminus D_1$ est à valeurs dans S_W est induit un isomorphisme G -invariant entre $\mathfrak{s}_W \setminus D_1$ et $S_W \setminus D_{\xi}$.*

Fixons un $\tau \in E$ tel que $\sigma(\tau) = -\tau$. Notons aussi τ la multiplication par la matrice τI dans $\tilde{\mathfrak{g}}_E$. Alors, τ induit une application bijective entre \mathcal{O} et lui même. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de \tilde{G} . Le groupe G agit sur \tilde{G} par conjugaison, et la multiplication par τ induit un isomorphisme G -équivariant des variétés \mathfrak{s}_W et $\tilde{\mathfrak{g}}$. Il sera plus commode de travailler avec $\tilde{\mathfrak{g}}$ qu'avec \mathfrak{s}_W .

5.2 Compatibilité de l'application de Cayley avec la décomposition de Levi

Soit $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$. On note $\mathfrak{m}_{\tilde{P}}$ l'algèbre de Lie de $M_{\tilde{P}}$ et $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}$ l'algèbre de Lie de $N_{\tilde{P}}$. On fixe une mesure de Haar sur $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ de façon que le volume du quotient $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{F}) \backslash \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ soit 1.

On a alors

Lemme 5.3. *Soient $\xi \in E^1$, $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}})$, $\gamma \in ((S_W \cap M_{\tilde{P}_E}) \setminus D_{\xi})(\mathbb{F})$ et notons $\zeta = \tau \kappa_{\xi}^{-1}(\gamma)$. Choisissons un $\delta \in M_{\tilde{P}}(\mathbb{E})$ tel que $\gamma = \delta \bar{\delta}^{-1}$. On a donc*

1) $\zeta \in (\mathfrak{m}_{\tilde{P}} \setminus D_{\tau})(\mathbb{F})$.

2) Pour tout $n \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ on a $\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} \in (S_W \setminus D_{\xi})(\mathbb{A})$.

3) Pour tout $n \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ il existe un unique $N \in \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ tel que

$$\tau \kappa_{\xi}^{-1}(\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1}) = \zeta + N.$$

4) L'application $n \mapsto N$ décrite dans le point ci-dessus induit un homéomorphisme

$$N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})/N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$$

qui préserve les mesures de Haar. En particulier, pour tout $\Phi \in C_c^{\infty}(S_W(\mathbb{A}))$ on a

$$\int_{N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})/N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \Phi(\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1}) dn = \int_{\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \Phi(\kappa_{\xi}(\tau^{-1}(\zeta + N))) dN$$

et l'intégrale à gauche ne dépend pas du choix de δ .

5) Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tel que $\gamma \in (S_W \cap M_{\tilde{P}_E} \cap \mathfrak{o})(\mathbb{F})$. Alors, pour tout $n \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ on a $\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} \in (S_W \cap \mathfrak{o})(\mathbb{A})$.

Démonstration. Le premier point est clair. Pour le deuxième, on a bien sûr $\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} \in S_W(\mathbb{A})$ et en plus $\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} = \gamma \bar{\delta} n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1}$. Puisque $\gamma, \bar{\delta} \in M_{\tilde{P}}(\mathbb{E})$ et $n \bar{n}^{-1} \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ on a $\bar{\delta} n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ et donc les polynômes caractéristiques de $\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1}$ et γ coïncident, d'où le résultat.

Démontrons le point 3). Soit $n_0 = \bar{\delta} n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} \in N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ et pour $\eta \in M_{\tilde{P}}(\mathbb{E})$ notons $n_0^{\eta} = \eta^{-1} n_0 \eta$. On a alors que $\kappa_{\xi}^{-1}(\delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1})$ égale

$$-(\xi + \gamma n_0)(\xi - \gamma n_0)^{-1} = -(\xi + \gamma + \gamma(n_0 - I))(\xi - \gamma - \gamma(n_0 - I))^{-1} = -(\xi + \gamma)(\xi - \gamma). \\ (I + (\xi + \gamma)^{-1} \gamma (n_0^{\xi^{-\gamma}} - I))(I - (\xi - \gamma)^{-1} \gamma (n_0 - I))^{-1} = \tau^{-1} \zeta (I + \alpha_1 (n_0^{\alpha_2} - I)) (I + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_3 (n_0 - I))^k)$$

pour certains $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in M_{\tilde{P}}(\mathbb{E})$. La somme qui apparaît ci-dessus est bien sûr finie car $\alpha_3(n_0 - I) \in \mathfrak{n}_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$. On voit donc que $N := \zeta (I + \alpha_1 (n_0^{\alpha_2} - I)) (I + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_3 (n_0 - I))^k) - \zeta \in \mathfrak{n}_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$. Puisque $\tau^{-1} \zeta \in (\mathfrak{s}_W \setminus D_1)(\mathbb{F})$, il résulte du lemme 5.2 que $\tau^{-1} N \in (\mathfrak{s}_W \cap \mathfrak{n}_{\tilde{P}_E})(\mathbb{A})$. Le même lemme montre que l'application $n \mapsto N$ est un isomorphisme entre $N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})/N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$. Le fait que la mesure soit préservée découle du fait que cette application est polynomiale à coefficients rationnels, ce qui démontre aussi le point 4).

Démontrons le point 5). Soit $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}$ tel que $\tau \kappa_{\xi}^{-1}((S_W \setminus D_{\xi}) \cap \mathfrak{o}) \subseteq \mathfrak{o}'$. En vertu du lemme 5.2, \mathfrak{o}' existe et est unique. En vertu du point 3) il suffit de montrer que $\zeta + N \in \mathfrak{o}'(\mathbb{A})$ pour tout $N \in \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$. Cela n'est pas difficile et est démontré dans le cas des groupes unitaires dans [Zyd15b], proposition 2.5. \square

5.3 Fonctions localisées

Pour toute place finie v de F (resp. w de E) soit F_v le complété de F à v (resp. E_w le complété de E à w) et soit \mathcal{O}_{F_v} (resp. \mathcal{O}_{E_w}) l'anneau des entiers de F_v (resp. E_w). Soit \mathcal{S}_F l'ensemble des toutes places de F et notons \mathcal{S}_∞ et \mathcal{S}_f les sous-ensembles de \mathcal{S}_F composés des places infinies et finies respectivement.

Pour une F -variété X lisse on note $C_c^\infty(X(\mathbb{A})) := C_c^\infty(X(F_\infty)) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(X(\mathbb{A}_f))$ où $C_c^\infty(X(F_\infty))$ c'est l'espace de fonctions lisses à support compact sur la variété différentiable $X(F_\infty)$ et $C_c^\infty(X(\mathbb{A}_f))$ c'est l'espace de fonctions localement constantes à support compact sur $X(\mathbb{A}_f)$. Pour tout $v \in \mathcal{S}_f$ (resp. $v \in \mathcal{S}_\infty$) on note aussi dans ce contexte $C^\infty(X(F_v))$ l'espace de fonctions localement constantes (resp. lisses) sur $X(F_v)$ et $C_c^\infty(X(F_v))$ le sous-espace de $C^\infty(X(F_v))$ composé de fonctions à support compact.

Fixons un isomorphisme $\tilde{G}_E \cong \text{Res}_{E/F}(\text{GL}_{n+1})$. On a alors que les variétés \tilde{G}_E , S_W , \mathfrak{s}_W , $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ sont définies sur l'anneau des entiers de F et on peut en particulier parler de ses \mathcal{O}_{F_v} -points pour tout $v \in \mathcal{S}_f$. Soit X l'une des ces variétés. Pour tout $v \in \mathcal{S}_f$ on note $\mathbf{1}_{X(\mathcal{O}_{F_v})} \in C_c^\infty(X(F_v))$ la fonction caractéristique du compact $X(\mathcal{O}_{F_v})$. On dit que $f \in C_c^\infty(X(\mathbb{A}))$ est décomposable si f s'écrit $f_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} f_v$ où $f_\infty \in C_c^\infty(X(F_\infty))$ et pour tout $v \in \mathcal{S}_f$ on a $f_v \in C_c^\infty(X(F_v))$ et $f_v = \mathbf{1}_{X(\mathcal{O}_{F_v})}$ pour presque toute place $v \in \mathcal{S}_f$. On a alors que toute fonction $f \in C_c^\infty(X(\mathbb{A}))$ est une somme finie des fonctions décomposables.

On note finalement $\text{supp}(f)$ le support d'une fonction f .

Lemme 5.4. *Pour tout $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ il existe un nombre fini des $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tels que $\text{supp}(f) \cap \mathfrak{o}(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Par définition de l'application Q , définie par (5.1), l'ensemble

$$\bigcup_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} Q(\mathfrak{o}(\mathbb{A}))$$

est contenu dans le réseau discret E^{2n+1} de $(\mathbb{A} \otimes_E E)^{2n+1}$. En plus, pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, l'ensemble $Q(\mathfrak{o}(\mathbb{A}))$ est composé d'un seul point et si $\mathfrak{o}' \neq \mathfrak{o}$ on a $Q(\mathfrak{o}'(\mathbb{A})) \neq Q(\mathfrak{o}(\mathbb{A}))$. Puisque l'image $Q(\text{supp}(f))$ du support de la fonction f par Q est compact dans $(\mathbb{A} \otimes_E E)^{2n+1}$, on obtient qu'il existe un nombre fini des $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tels que $Q(\mathfrak{o}(\mathbb{A})) \cap Q(\text{supp}(f)) \neq \emptyset$ d'où le résultat. \square

Définition 5.5. *Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $\xi \in E^1$ et $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$. On dit que f est \mathfrak{o} - ξ -adaptée si elle vérifie les conditions suivantes :*

- 1) *La fonction f est décomposable. On écrit alors $f = f_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} f_v$.*
- 2) *Pour tout $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}$ si $\mathfrak{o}'(\mathbb{A}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ alors $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$.*
- 3) *$\mathfrak{o} \cap D_\xi = \emptyset$.*
- 4) *Il existe un ensemble fini $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_F$ tel que*
 - a) *$\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_\infty$.*
 - b) *Pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ on a $f_v = \mathbf{1}_{S_W(\mathcal{O}_{F_v})}$.*
 - c) *Soit $\mathfrak{o}' = \tau \kappa_\xi^{-1}(\mathfrak{o}) \in \mathcal{O}$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ et toute place w de E au dessus de v on a que $P_{\mathfrak{o}'}(\tau)$, $P_{\mathfrak{o}'}(-\tau)$, $P_{\mathfrak{o}}(\xi)$, τ , et ξ appartiennent à $\mathcal{O}_{E_w}^*$.*
 - d) *On a $\text{supp}(f_\infty) \subseteq (S_W \setminus D_\xi)(F_\infty)$ et pour tout $v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_\infty$ on a $\text{supp}(f_v) \subseteq (S_W \setminus D_\xi)(F_v)$.*

Lemme 5.6. *Soit $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ décomposable et $\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_m \in \mathcal{O}$ tous les éléments de \mathcal{O} qui vérifient $\mathfrak{o}_i(\mathbb{A}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ donnés par le lemme 5.4. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ il existe un $\xi_i \in E^1$ et une fonction $f_i \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ qui est \mathfrak{o}_i - ξ_i -adaptée telle que pour tout $s \in (S_W \cap \mathfrak{o}_i)(\mathbb{A})$ on a $f(s) = f_i(s)$.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Prenons un $\xi_i \in E^1$ tel que $\mathfrak{o}_i \cap D_{\xi_i} = \emptyset$. Écrivons $f = \otimes_v f_v$ et soit $\mathfrak{o}'_i = \tau \kappa_{\xi_i}^{-1}(\mathfrak{o}_i)$. Soit \mathcal{S} un sous-ensemble fini de \mathcal{S}_F qui vérifie les conditions suivantes :

- $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_\infty$.
- Pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ et toute place w de E au dessus de v on a $P_{\mathfrak{o}'_i}(\tau), P_{\mathfrak{o}'_i}(-\tau), P_{\mathfrak{o}_i}(\xi_i), \tau, \xi_i \in \mathcal{O}_{E_w}^*$.
- Pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ on a $f_v = \mathbb{1}_{S_W(\mathcal{O}_{F_v})}$.

Pour tout $v \in \mathcal{S}$ il est clair qu'il existe un $\phi_v \in C^\infty(S_W(F_v))$ tel que $\text{supp}(\phi_v) \subseteq (S_W \setminus (D_{\xi_i} \cup \bigcup_{j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}} \mathfrak{o}_j))(F_v)$ et la restriction de ϕ_v à $(S_W \cap \mathfrak{o}_i)(F_v)$ égale 1. Prenons une telle fonction ϕ_v pour tout $v \in \mathcal{S}$ et posons $f_i := f \cdot \prod_{v \in \mathcal{S}} \phi_v$. Alors, $f_i \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ et f_i est \mathfrak{o}_i - ξ_i -adaptée. En plus, pour tout $s \in (S_W \cap \mathfrak{o}_i)(\mathbb{A})$ on a $f_i(s) = f(s)$ ce qu'il fallait démontrer. \square

5.4 Descente vers l'algèbre de Lie

Lemme 5.7. Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $\xi \in E^1$ et $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ une fonction \mathfrak{o} - ξ -adaptée. Il existe une fonction décomposable $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ telle que

$$f(s) = \Phi(\tau \kappa_\xi^{-1}(s)), \quad \forall s \in (S_W \cap \mathfrak{o})(\mathbb{A}).$$

Démonstration. On va construire $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ de type $\Phi_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} \Phi_v$. Soit \mathcal{S} l'ensemble de places de F associé à f comme dans le point 2) de la définition 5.5 et écrivons $f = f_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} f_v$. Pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ on pose alors $\Phi_v = \mathbb{1}_{\tilde{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_{F_v})}$. Soit $v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_\infty$. On définit Φ_v de façon suivante. Si $X \in (\tilde{\mathfrak{g}} \setminus D_\tau)(F_v)$ on pose $\Phi_v(X) = f_v(\kappa_\xi(\tau^{-1}X))$ et si $X \in D_\tau(F_v)$ on pose $\Phi_v(X) = 0$. En utilisant le fait que $\text{supp}(f_v) \subseteq (S_W \setminus D_\xi)(F_v)$ et le lemme 5.2 on voit que $\Phi_v \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(F_v))$. De même on définit $\Phi_\infty(X)$ par $f_\infty(\kappa_\xi(\tau^{-1}X))$ si $X \in (\tilde{\mathfrak{g}} \setminus D_\tau)(F_\infty)$ et par 0 sinon. On trouve alors que $\Phi_\infty \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(F_\infty))$. On a donc bien que $\Phi := \Phi_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} \Phi_v \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$.

Soit alors $s = \prod_v s_v \in (S_W \cap \mathfrak{o})(\mathbb{A})$. On a $f_\infty(\prod_{v \in \mathcal{S}_\infty} s_v) = \Phi_\infty(\tau \kappa_\xi^{-1}(\prod_{v \in \mathcal{S}_\infty} s_v))$ et $f_v(s_v) = \Phi_v(\tau \kappa_\xi^{-1}(s_v))$ pour $v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_\infty$ par construction. Supposons que $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$. Soit $\mathfrak{o}' = \tau \kappa_\xi^{-1}(\mathfrak{o})$. En vertu du point 4) c) de la définition 5.5, l'application $\tau \kappa_\xi^{-1}$ induit une bijection entre $S_W(\mathcal{O}_{F_v}) \cap \mathfrak{o}(F_v)$ et $\tilde{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_{F_v}) \cap \mathfrak{o}'(F_v)$. On a donc $s_v \in S_W(\mathcal{O}_{F_v})$ si et seulement si $\tau \kappa_\xi^{-1}(s_v) \in \tilde{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_{F_v})$ d'où $f_v(s_v) = \mathbb{1}_{S_W(\mathcal{O}_{F_v})}(s_v) = \Phi(\tau \kappa_\xi^{-1}(s_v)) = \mathbb{1}_{\tilde{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_{F_v})}(\tau \kappa_\xi^{-1}(s_v))$. \square

5.5 Le côté géométrique de la formule des traces pour les groupes linéaires

Soient $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$, $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Posons

$$k_{f, \tilde{P}, \mathfrak{o}}(x) = \sum_{\gamma \in (M_{\tilde{P}_E} \cap S_W \cap \mathfrak{o})(F)} \int_{N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})/N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1} \delta n \bar{n}^{-1} \bar{\delta}^{-1} x) dn, \quad x \in M_{\tilde{P}}(F) N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})$$

où $\delta \in M_{\tilde{P}}(E)$ est tel que $\delta \bar{\delta}^{-1} = \gamma$. La définition ne dépend pas du choix de δ en vertu du lemme 5.3 4). On définit aussi pour $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ la fonction

$$k_{\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\tilde{P}} \cap \mathfrak{o})(F)} \int_{\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \Phi(x^{-1}(\xi + N)x) dN, \quad x \in M_{\tilde{P}}(F) N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}).$$

Dans le paragraphe 2.1 de [Zyd15a] nous avons défini une relation d'équivalence sur $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$, notons $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}(F)}$ l'ensemble de classes d'équivalence pour cette relation. Il existe alors une bijection entre $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}(F)}$ et l'ensemble de classes $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tels que $\mathfrak{o} \cap \tilde{\mathfrak{g}} \neq \emptyset$, la bijection étant : à $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}(F)}$ on associe l'unique $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tel que $(\mathfrak{o} \cap \tilde{\mathfrak{g}})(F) = \mathfrak{o}'$. Avec la notation du paragraphe 2.2 de loc. cit., si $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{g}}(F)}$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ se correspondent de cette façon, pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ et tout $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ on a :

$$k_{\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}'} = k_{\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}}.$$

On a alors le corollaire suivant du lemme 5.7.

Corollaire 5.8. Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $\xi \in E^1$ et $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ une fonction \mathfrak{o} - ξ -adaptée. Notons $\mathfrak{o}' = \tau k_\xi^{-1}(\mathfrak{o})$. Il existe alors une fonction décomposable $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ telle que $\text{supp}(\Phi) \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}) \setminus D_\tau(\mathbb{A})$ et telle que pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{\mathfrak{g}}}, B)$ et tout $x \in G(\mathbb{A})$ on a

$$k_{f, \tilde{P}, \mathfrak{o}}(x) = k_{\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}'}(x).$$

Démonstration. On prend Φ donné par le lemme 5.7. Il résulte alors directement de ce lemme-là et du point 4) du lemme 5.3 que $k_{f, \tilde{P}, \mathfrak{o}}(1) = k_{\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}'}(1)$. En utilisant le fait que τk_ξ^{-1} est G -équivariant, on obtient le résultat voulu. \square

Pour $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$, $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ posons

$$k_{f, \mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{\mathfrak{g}}}, B)} (-1)^{d_{\tilde{P}}} \sum_{\delta \in P(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{F})} \hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_{\tilde{P}}(\delta x) - T_{\tilde{P}}) k_{f, \tilde{P}, \mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in G(\mathbb{F}) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Théorème 5.9. Soit $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$.

1) Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{[G]} |k_{f, \mathfrak{o}}^T(x)| |\det x|_{\mathbb{A}}^\sigma dx < \infty.$$

2) Pour $s \in \mathbb{C}$, $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ on pose

$$I_{\mathfrak{o}}^T(s, f) = \int_{[G]} k_{f, \mathfrak{o}}^T(x) |\det x|_{\mathbb{A}}^s \eta(\det x) dx.$$

Alors, la fonction $T \mapsto I_{\mathfrak{o}}^T(s, f)$ est un polynôme-exponentielle, dont le terme purement polynomial est constant si $s \neq -1, 1$.

3) Si $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ on note $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ le terme constant de la distribution $I_{\mathfrak{o}}^T(s, \cdot)$. Alors, la distribution $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ ne dépend que du choix de la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ et des choix des mesures sur les points adéliques des parties unipotentes $N_{\tilde{P}}$ et $N_{\tilde{P}_E}$ des F -sous-groupes paraboliques de \tilde{G} et \tilde{G}_E , le choix étant que les volumes $N_{\tilde{P}}(\mathbb{F}) \backslash N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ et $N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{F}) \backslash N_{\tilde{P}_E}(\mathbb{A})$ soient 1.

4) Soit $y \in G(\mathbb{A})$. On note $f^y \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ la fonction donnée par $f^y(s) = f(\text{Ad}(y)s)$. On a alors

$$I_{\mathfrak{o}}(s, f^y) = \eta(\det y) |\det y|_{\mathbb{A}}^s I_{\mathfrak{o}}(s, f), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, \quad \forall \mathfrak{o} \in \mathcal{O}.$$

Démonstration. Toute fonction $f \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ est une somme finie des fonctions décomposables, on peut alors supposer que f est décomposable. Soient $\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_m \in \mathcal{O}$ tous les éléments de \mathcal{O} qui vérifient $\mathfrak{o}_i(\mathbb{A}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ donnés par le lemme 5.4. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ soient $\xi_i \in E^1$ et $f_i \in C_c^\infty(S_W(\mathbb{A}))$ la fonction \mathfrak{o}_i - ξ_i -adaptée associée à f par le lemme 5.6. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ on a $k_{f, \mathfrak{o}_i}^T = k_{f_i, \mathfrak{o}_i}^T$ et

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} |k_{f, \mathfrak{o}}^T| = \sum_{i=1}^m \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} |k_{f_i, \mathfrak{o}}^T| = \sum_{i=1}^m |k_{f_i, \mathfrak{o}_i}^T|.$$

En plus, pour tout $y \in G(\mathbb{A})$ et tout $i \in \{1, \dots, m\}$ on a $k_{f^y, \mathfrak{o}_i}^T = k_{f_i^y, \mathfrak{o}_i}^T$ ce qui démontre qu'on peut supposer que f est \mathfrak{o} - ξ -adaptée pour certains $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $\xi \in E^1$. Soit donc $\Phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ une fonction associée à f comme dans le lemme 5.7. En vertu de ce lemme-là et du corollaire 5.8, on a pour tout $y \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ que $k_{f^y, \mathfrak{o}}^T = k_{\Phi^y, \mathfrak{o}'}^T$ où $\mathfrak{o}' = \tau \kappa_\xi(\mathfrak{o})$ et $\Phi^y(X) = \Phi(\text{Ad}(y)X)$.

Le théorème découle alors des résultats suivants démontrés dans [Zyd15a]. Le point 1) découle du théorème 2.6, le point 2) résulte de la proposition 3.7 et du théorème 3.8, le point 3) c'est la conséquence du paragraphe 3.5 et finalement le point 4) suit du théorème 3.11. \square

5.6 La formule des traces relative

Soit $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$ Notons alors pour $y \in S_W(\mathbb{A})$:

$$f_\Phi(y) := \int_{G_E(\mathbb{A})} \int_{\tilde{G}(\mathbb{A})} \Phi(x, xy\tilde{h}) d\tilde{h} dx.$$

On définit alors dans ce cas pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$

$$I_{\mathfrak{o}}^T(s, \Phi) := I_{\mathfrak{o}}^T(s, f_\Phi)$$

et si $s \neq -1, 1$:

$$I_{\mathfrak{o}}(s, \Phi) := I_{\mathfrak{o}}(s, f_\Phi).$$

On utilise la notation de la section 3.

Théorème 5.10. *[La formule des traces relative de Jacquet-Rallis, cas des groupes linéaires]*
Pour tout $\Phi \in C_c^\infty((G_E \times \tilde{G}_E)(\mathbb{A}))$, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tous $s, s' \in \mathbb{C}$ on a

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}} I_\chi^T(s, s', \Phi) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^T(s + s', \Phi). \quad (5.3)$$

En plus, si $s + s' \neq -1, 1$ on a

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}} I_\chi(s, s', \Phi) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(s + s', \Phi). \quad (5.4)$$

Démonstration. Pour $\tilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\tilde{0}}, B)$ soient $k_{\Phi, \tilde{P}} := \sum_{\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}} k_{\Phi, \tilde{P}, \chi}$ et $k_{f_\Phi, \tilde{P}} = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} k_{f_\Phi, \tilde{P}, \mathfrak{o}}$. On vérifie alors facilement que pour tous $h \in G(\mathbb{A})$ et $s, s' \in \mathbb{C}$ on a

$$\int_{[G_E]} \int_{[\tilde{G}]} \sum_{\substack{\delta_1 \in P(E) \backslash G(E) \\ \delta_3 \in \tilde{P}(F) \backslash \tilde{G}(F)}} k_{\Phi, \tilde{P}}(\delta_1 x, \delta_1 x, h, \delta_3 \tilde{h}) |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dx = k_{f_\Phi, \tilde{P}}(h) |\det h|_{\mathbb{A}}^{s+s'} \eta(\det h). \quad (5.5)$$

Si l'on pose alors pour $T \in \mathfrak{a}_0$, $k_\Phi^T := \sum_{\chi \in \mathcal{X}^{G_E \times \tilde{G}_E}} k_{\Phi, \chi}^T$ et $k_{f_\Phi}^T := \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} k_{f_\Phi, \mathfrak{o}}^T$, on voit que l'égalité (5.3) se traduit en

$$\int_{[G_E]} \int_{[G]} \int_{[\tilde{G}]} k_\Phi^T(x, x, h, \tilde{h}) |\det x|_{\mathbb{A}}^s |\det h|_{\mathbb{A}}^{s'} \eta(h, \tilde{h}) d\tilde{h} dx = \int_{[G]} k_{f_\Phi}^T |\det h|_{\mathbb{A}}^{s+s'} \eta(\det h) dh,$$

ce qui est vrai en vertu de l'égalité (5.5) et de la convergence absolue des intégrales en question, donnée par les théorèmes 3.1 et 5.9 1).

La deuxième partie découle maintenant de la première et des théorèmes 3.8 et 5.9 2), car égalité des polynômes-exponentielles implique égalité de leur termes constantes. \square

6 Formule des traces relative de Jacquet-Rallis pour les groupes unitaires

Les résultats de cette section sont analogues aux résultats de la section 5 et pour la plupart des résultats on envoie le lecteur à la section 5. Soit $\tilde{\mathfrak{u}} = \text{Lie}(\tilde{U})$. On regarde U , \tilde{U} et $\tilde{\mathfrak{u}}$ comme des sous-variétés de $\tilde{\mathfrak{g}}_E$.

6.1 Préparations pour le côté géométrique

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. On note $\mathfrak{m}_{\tilde{P}}$ l'algèbre de Lie de $M_{\tilde{P}}$ et $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}$ l'algèbre de Lie de $N_{\tilde{P}}$. On fixe une mesure de Haar sur $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ de façon que le volume du quotient $\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{F}) \backslash \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ soit 1.

On a alors :

Lemme 6.1. *Soient $\xi \in E^1$, $P \in \mathcal{F}(M_0)$, $\gamma \in ((\tilde{U} \cap M_{\tilde{P}}) \setminus D_\xi)(\mathbb{F})$ et notons $\zeta = \kappa_\xi^{-1}(\gamma)$. On a donc :*

- 1) $\zeta \in (\mathfrak{m}_{\tilde{P}} \setminus D_1)(\mathbb{F})$.
- 2) Pour tout $n \in N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ on a $\gamma n \in (\tilde{U} \setminus D_\xi)(\mathbb{A})$.
- 3) Pour tout $n \in N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ il existe une unique $N \in \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ tel que

$$\kappa_\xi^{-1}(\gamma n) = \zeta + N.$$

- 4) L'application $n \mapsto N$ décrite dans le point ci-dessus induit un homéomorphisme

$$N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$$

qui préserve les mesures de Haar. En particulier, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ on a

$$\int_{N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \phi(\gamma n) dn = \int_{\mathfrak{n}_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \phi(\kappa_\xi(\zeta + N)) dN.$$

- 5) Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tel que $\gamma \in (\tilde{U} \cap M_{\tilde{P}} \cap \mathfrak{o})(\mathbb{F})$. Alors, pour tout $n \in N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ on a $\gamma n \in (\tilde{U} \cap \mathfrak{o})(\mathbb{A})$.

Démonstration. Pour le premier point, pour $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_E(\mathbb{A})$ soit X^* l'endomorphisme adjoint par rapport à la forme hermitienne $\tilde{\Phi}$ définissant \tilde{U} . Il suffit de montrer que $\zeta \in \tilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{F})$, autrement dit que $\zeta + \zeta^* = 0$. On a alors :

$$\zeta + \zeta^* = -(\xi + \gamma)(\xi - \gamma)^{-1} - (\xi^* + \gamma^*)(\xi^* - \gamma^*)^{-1}.$$

En utilisant le fait que $\xi^* = \xi^{-1}$ et $\gamma^* = \gamma^{-1}$ on obtient le résultat voulu. Le deuxième point est clair. La preuve des points 3), 4) et 5) est analogue à celle du lemme 5.3. \square

Dans le paragraphe 5.3 nous avons fixé l'isomorphisme $\tilde{G}_E \cong \text{Res}_{E/\mathbb{F}} \text{GL}_{n+1}$. On regarde alors \tilde{U} comme une sous-F-variété de $\text{Res}_{E/\mathbb{F}} \text{GL}_{n+1}$. La variété \tilde{U} est alors définie sur une localisation de l'anneau des entiers de \mathbb{F} et notons $\mathcal{S}_{\tilde{U}}$ le sous-ensemble fini des places finies de \mathbb{F} tel que pour tout $v \in \mathcal{S}_f \setminus \mathcal{S}_{\tilde{U}}$ l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_v}$ contient cette localisation. Pour tout $v \in \mathcal{S}_f \setminus \mathcal{S}_{\tilde{U}}$ on peut alors parler des $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_v}$ -points de \tilde{U} et de $\tilde{\mathfrak{u}}$.

Lemme 6.2 (cf. lemme 5.4). *Pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ il existe un nombre fini des $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tels que $\text{supp}(f) \cap \mathfrak{o}(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.*

Définition 6.3. *Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $\xi \in E^1$ et $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$. On dit que f est \mathfrak{o} - ξ -adaptée si elle vérifie les conditions suivantes :*

- 1) La fonction f est décomposable. On écrit alors $f = f_\infty \otimes_{v \in \mathcal{S}_f} f_v$.
- 2) Pour tout $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}$ si $\mathfrak{o}'(\mathbb{A}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ alors $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$.
- 3) $\mathfrak{o} \cap D_\xi = \emptyset$.
- 4) Il existe un ensemble fini des places \mathcal{S} tel que

- $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_\infty \cup \mathcal{S}_{\tilde{U}}$.
- Soit $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}$ tel que $\kappa_\xi^{-1}(\mathfrak{o}') = \mathfrak{o}'$ donné par le lemme 5.1. Alors, pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ et toute place w de E au dessus de v on a que $P_{\mathfrak{o}'}(1)$, $P_{\mathfrak{o}'}(-1)$, $P_{\mathfrak{o}'}(\xi)$ et ξ appartiennent à $\mathcal{O}_{E_w}^*$.
- Pour tout $v \in \mathcal{S}_F \setminus \mathcal{S}$ on a $f_v = \mathbb{1}_{\tilde{U}(\mathcal{O}_{F_v})}$.
- On a $\text{supp}(f_\infty) \subseteq (\tilde{U} \setminus D_\xi)(F_\infty)$ et pour tout $v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_\infty$ on a $\text{supp}(f_v) \subseteq (\tilde{U} \setminus D_\xi)(F_v)$.

Lemme 6.4 (cf. lemme 5.6). Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ décomposable et $\mathfrak{o}_1, \dots, \mathfrak{o}_m \in \mathcal{O}$ tous les éléments de \mathcal{O} qui vérifient $\mathfrak{o}_i(\mathbb{A}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ donnés par le lemme 6.2. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ il existe un $\xi_i \in E^1$ et une fonction $f_i \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ qui est \mathfrak{o}_i - ξ_i -adaptée telle que pour tout $x \in (\tilde{U} \cap \mathfrak{o}_i)(\mathbb{A})$ on a $f(x) = f_i(x)$.

Lemme 6.5 (cf. lemme 5.7). Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $\xi \in E^1$ et $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ une fonction \mathfrak{o} - ξ -adaptée. Il existe une fonction décomposable $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ telle que

$$f(x) = \Phi(\kappa_\xi^{-1}(x)), \quad \forall x \in (\tilde{U} \cap \mathfrak{o})(\mathbb{A}).$$

6.2 Le côté géométrique de la formule des traces pour les groupes unitaires

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$, $P \in \mathcal{F}(P_0)$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Posons

$$k_{f,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\gamma \in (M_{\tilde{P}} \cap \mathfrak{o})(F)} \int_{N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma nx) dn, \quad x \in M_{\tilde{P}}(F)N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A}).$$

On définit aussi pour $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ la fonction

$$k_{\Phi,P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\tilde{P}} \cap \mathfrak{o})(F)} \int_{N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})} \Phi(x^{-1}(\xi + N)x) dN, \quad x \in M_{\tilde{P}}(F)N_{\tilde{P}}(\mathbb{A}) \backslash \tilde{U}(\mathbb{A}).$$

Dans le paragraphe 2.3 de [Zyd15b] nous avons défini une relation d'équivalence sur $\tilde{U}(F)$. Notons $\mathcal{O}'_{\tilde{U}}$ l'ensemble de classes d'équivalence pour cette relation. Notons aussi $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$ l'ensemble de $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ tels que $\mathfrak{o} \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. On a alors une application surjective naturelle $p : \mathcal{O}'_{\tilde{U}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{U}}$ qui à $\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}'_{\tilde{U}}$ associe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{\tilde{U}}$ tel que $\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}(F)$. On a alors, avec la notation du début de la section 3 de [Zyd15b], que pour tout $P \in \mathcal{F}(P_0)$, tout $\Phi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ et tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{\tilde{U}}$:

$$k_{\Phi,P,\mathfrak{o}} = \sum_{\mathfrak{o}' \in p^{-1}(\mathfrak{o})} k_{\Phi,P,\mathfrak{o}'}.$$

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ posons

$$k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{P \subseteq P_0} (-1)^{d_P} \sum_{\delta \in P(F) \backslash U(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T_P) k_{f,P,\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in U(F) \backslash U(\mathbb{A}).$$

Théorème 6.6. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$.

1) Pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{[U]} |k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)| dx < \infty.$$

2) Pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ on pose

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{[U]} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) dx.$$

Alors, la fonction $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ est un polynôme-exponentielle, dont le terme purement polynomial est constant.

3) On note $J_{\mathfrak{o}}(\cdot)$ le terme constant de la distribution $J_{\mathfrak{o}}^T(\cdot)$. Alors, la distribution $J_{\mathfrak{o}}(\cdot)$ ne dépend que du choix de la mesure de Haar sur $U(\mathbb{A})$ et des choix des mesures sur les points adéliques des parties unipotentes $N_{\tilde{P}}$ des F-sous-groupes paraboliques de \tilde{U} , le choix étant que le volume $N_{\tilde{P}}(\mathbb{F}) \backslash N_{\tilde{P}}(\mathbb{A})$ soit 1.

4) Soit $y \in U(\mathbb{A})$. On note $f^y \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$ la fonction donnée par $f^y(x) = f(\text{Ad}(y)x)$. On a alors

$$J_{\mathfrak{o}}(f^y) = J_{\mathfrak{o}}(f), \quad \forall \mathfrak{o} \in \mathcal{O}.$$

Démonstration. Tout comme le théorème 5.9, les lemmes préparatoires 6.1, 6.2 et 6.5 ramènent la preuve aux cas des algèbres de Lie qui est traité en détail dans [Zyd15b]. \square

6.3 La formule des traces relative

Soit $\Phi \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$. Notons alors pour $x \in \tilde{U}(\mathbb{A})$

$$f_\Phi(x) := \int_{U(\mathbb{A})} \Phi(y, xy) dy.$$

On voit que $f_\Phi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbb{A}))$. On définit alors dans ce cas pour $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$

$$J_{\mathfrak{o}}^T(\Phi) := J_{\mathfrak{o}}^T(f_\Phi),$$

et

$$J_{\mathfrak{o}}(\Phi) := J_{\mathfrak{o}}(f_\Phi).$$

On utilise la notation de la section 4.

Théorème 6.7 (La formule des traces relative de Jacquet-Rallis, cas des groupes unitaires). *Pour tout $\Phi \in C_c^\infty((U \times \tilde{U})(\mathbb{A}))$ et tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ on a*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}} J_\chi^T(\Phi) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(\Phi)$$

et

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}^{U \times \tilde{U}}} J_\chi(\Phi) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(\Phi).$$

Démonstration. La preuve du théorème est analogue à la preuve de son homologue, le théorème 5.10 du paragraphe 5.6. \square

A Un lemme

Soit G un F-groupe réductif comme dans le paragraphe 1.1. Fixons $P_0 \in \mathcal{F}(M_0)$ et notons $\mathcal{F}(P_0)$ l'ensemble des sous-F-groupes paraboliques de G contenant P_0 .

Lemme A.1. *Soit $P \in \mathcal{F}(P_0)$ et soit $\varpi \in \hat{\Delta}_0 \setminus \hat{\Delta}_P$. Alors*

a) *Pour tout $\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee$ on a $\varpi(\alpha^\vee) \geq 0$.*

b) *Pour tout $\varpi^\vee \in (\hat{\Delta}_0^P)^\vee$ on a $\varpi(\varpi^\vee) \geq 0$.*

c) *Soit $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_0^\vee$ un élément correspondant à ϖ et soit $\overline{\varpi}^\vee \in (\hat{\Delta}_0^P)^\vee$ sa projection sur \mathfrak{a}_0^P . Alors $\varpi(\overline{\varpi}^\vee) > 0$.*

Démonstration. Le lemme 1.7.1 de [LW09] montre que $\hat{\tau}_0 \geq \tau_0^P \hat{\tau}_P$. Il est facile de voir que cela entraîne les points *a)* et *b)*. En ce qui concerne le point *c)*, on a la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathfrak{a}_0^G qui est bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et euclidienne. Elle identifie alors $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ avec \mathfrak{a}_0^G . Par cette identification ϖ correspond à un multiple positif de ϖ^\vee . En plus, les espaces \mathfrak{a}_0^P et \mathfrak{a}_P^G sont orthogonaux pour la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce qui démontre le dernier point. \square

Soient $s \in \Omega^G$ et $\varpi \in \hat{\Delta}_0$. On note $\varpi^s = \varpi - s\varpi$ et $a_{\alpha, \varpi}^s$ les réels tels que $\varpi^s = \sum_{\alpha \in \Delta_0} a_{\alpha, \varpi}^s \alpha$. On note quelques propriétés standards utiles dans la suite

P1) Pour tout $\alpha \in \Delta_0$ on a $a_{\alpha, \varpi}^s \geq 0$ et si $\gamma \in \Delta_0$ est la racine correspondant à ϖ on a $a_{\gamma, \varpi}^s > 0$ si et seulement si $\varpi^s \neq 0$.

P2) Soient $P, Q \in \mathcal{F}(P_0)$ tels que $P \subseteq Q$. Si $s \in \Omega^Q$ on a $a_{\alpha, \varpi}^s = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^Q$. Dans ce cas, pour tout $H \in \mathfrak{a}_P$ on a $\varpi^s(H) = \sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} a_\alpha \alpha(H)$ où $a_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$.

Lemme A.2. Soient $P, Q, P', Q' \in \mathcal{F}(P_0)$, $M, M' \geq 0$, $H, X \in \mathfrak{a}_P^G$, $H', X' \in \mathfrak{a}_{P'}^G$ et $s, s' \in \Omega^{Q \cap Q'}$ tels que $P \cup P' \subseteq Q \cap Q'$, $\tau_P^Q(H - X) = 1$, $\tau_{P'}^{Q'}(H' - X') = 1$ et

$$\varpi(H) - s'\varpi(H') \leq M, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P, \quad (\text{A.1})$$

$$\varpi(H') - s\varpi(H) \leq M', \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{P'}. \quad (\text{A.2})$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante des H, H', X, X', M, M' telle que

$$\alpha(H) - \alpha(H') \leq C(M + M' + \|X\| + \|X'\|), \quad \forall \alpha \in \Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P, \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha(H') - \alpha(H) \leq C(M + M' + \|X\| + \|X'\|), \quad \forall \alpha \in \Delta_0^{Q'} \setminus \Delta_0^{P'}.$$

Démonstration. Puisque l'énoncé est symétrique il suffit de montrer les inégalités (A.3). Soit $\gamma \in \Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P$ et soit $\varpi \in \Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P$ le poids lui correspondant. Écrivons ϖ dans la base $(\hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}) \cup \Delta_0^{P'} \cup \{\gamma\}$ de $(\mathfrak{a}_0^G)^*$:

$$\varpi = \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}} c_\varpi \varpi + \sum_{\alpha \in \Delta_0^{P'} \cup \{\gamma\}} c_\alpha \alpha.$$

En vertu du lemme A.1 on a $c_\varpi, c_\alpha \geq 0$ et $c_\gamma > 0$. Notons $\varpi_0 = \sum_{\alpha \in \Delta_0^{P'} \cup \{\gamma\}} c_\alpha \alpha$.

Pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}$ on multiplie l'équation (A.2) par c_ϖ et ensuite on ajoute toutes ces équations à l'équation (A.1) avec $\varpi = \varpi$. On retrouve alors :

$$\varpi_0(H) + \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}} c_\varpi \varpi^s(H) + \varpi^{s'}(H') - \varpi_0(H') \leq M' + CM \quad (\text{A.4})$$

où $C = \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}} c_\varpi$.

Soit $\varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \setminus \{\varpi\}$. Puisque $Q \supseteq Q \cap Q'$ on a $\varpi^s(H) = \sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} a_{\alpha, \varpi}^s \alpha(H)$ par la propriété **P2)** ci-dessus. On a $\alpha(H) \geq \alpha(X)$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$ par hypothèse $\tau_P^Q(H - X) = 1$. Grâce à la propriété **P1)** on a $a_{\alpha, \varpi}^s \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$. On voit donc qu'il existe une constante $c'_\varpi > 0$ telle que $-c_\varpi \varpi^s(H) \leq c'_\varpi \|X\|$. Par le même raisonnement, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $-\varpi^{s'}(H') \leq c_0 \|X'\|$. On a démontré alors que l'inégalité (A.4) ci-dessus, entraîne

$$\varpi_0(H) - \varpi_0(H') \leq C_0(M' + M + \|X\| + \|X'\|) \quad (\text{A.5})$$

pour une constante $C_0 > 0$.

La condition $P \cup P' \subseteq Q \cap Q'$ est équivalente à $\Delta_0^P \cup \Delta_0^{P'} \subseteq \Delta_0^Q \cap \Delta_0^{Q'}$ ce qui démontre que $\Delta_0^{P'} \subseteq \Delta_0^Q$. En utilisant l'hypothèse $\tau_P^Q(H - X) = 1$ de nouveau et le fait que $\alpha(H) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^P$, on trouve

$$\varpi_0(H) = \sum_{\alpha \in (\Delta_0^{P'} \cup \{\gamma\}) \cap (\Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P)} c_\alpha \alpha(H) \geq c_\gamma \gamma(H) + \sum_{\alpha \in (\Delta_0^{P'} \cap (\Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P)) \setminus \{\gamma\}} c_\alpha \alpha(X) \geq c_\gamma \gamma(H) - C'_0 \|X\|$$

pour une constante $C'_0 > 0$. En utilisant ceci, l'inégalité (A.5) et les faits que $\varpi_0(H') = c_\gamma \gamma(H')$ et $c_\gamma > 0$ on conclut la preuve. \square

Corollaire A.3. Soient $P, Q, Q' \in \mathcal{F}(P_0)$, $P' \in \mathcal{F}(M_0)$, $M, M' \geq 0$, $H, X \in \mathfrak{a}_P^G$, $H', X' \in \mathfrak{a}_{P'}^G$ et $s, s' \in \Omega^{Q \cap Q'}$ tels que $P \cup P' \subseteq Q \cap Q'$, $\tau_P^Q(H - X) = 1$, $\tau_{P'}^{Q'}(H' - X') = 1$ et

$$\varpi(H) - s' \varpi(H') \leq M, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P, \quad (\text{A.6})$$

$$\varpi(H') - s \varpi(H) \leq M', \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{P'}. \quad (\text{A.7})$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante des H, H', X, X', M, M' telle que si l'on note P_1 le plus petit sous-groupe parabolique contenant P et P' et $s_0 \in \Omega^{P_1}$ tel que $s_0^{-1}P' \in \mathcal{F}(P_0)$ on a

$$\begin{aligned} \alpha(H) - \alpha(s_0^{-1}H') &\leq C(M + M' + \|X\| + \|X'\|), \quad \forall \alpha \in \Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P, \\ \alpha(H') - \alpha(s_0H) &\leq C(M + M' + \|X\| + \|X'\|), \quad \forall \alpha \in \Delta_{s_0P_0}^{Q'} \setminus \Delta_{s_0P_0}^{P'}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit s_0 comme dans l'énoncé. Notons $P'' = s_0^{-1}P'$. On a alors, que les inégalités (A.6) et (A.7) s'écrivent comme

$$\begin{aligned} \varpi(H) - s_0^{-1}s' \varpi(s_0^{-1}H') &\leq M, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P, \\ \varpi(s_0^{-1}H') - ss_0 \varpi(H) &\leq M', \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_{P''}. \end{aligned}$$

Remarquons que $s_0Q' = Q'$. On a donc bien $P \cup P'' \subseteq Q \cap Q'$ et $s_0^{-1}s', ss_0 \in \Omega^{Q \cap Q'}$. En plus on a $\tau_{P''}^{Q'}(s_0^{-1}H' - s_0^{-1}X') = 1$. En appliquant alors le lemme A.2 on trouve le résultat voulu. \square

Pour $s \in \Omega$ on pose $\hat{\Delta}_s = \{\varpi \in \hat{\Delta}_0 | \varpi^s = 0\}$.

Lemme A.4. Soient $P_1, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathcal{F}(P_0)$, $P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$, $M_1, M_2, M_3, M_4 \geq 0$, $H_1, X_1 \in \mathfrak{a}_1^G$, $H_2, X_2 \in \mathfrak{a}_2^G$, $H_3, X_3 \in \mathfrak{a}_3^G$, $s_1, s_2, s'_1, s'_2 \in \Omega^{P_4 \cap P_5 \cap P_6}$. Soit Q_1 le plus petit sous-groupe parabolique contenant $P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Supposons qu'on a $Q_1 \subseteq P_4 \cap P_5 \cap P_6 =: Q_2$ et que

$$\hat{\Delta}_{Q_2} = \hat{\Delta}_{Q_1} \cap \hat{\Delta}_{s_1} \cap \hat{\Delta}_{s_2} = \hat{\Delta}_{Q_1} \cap \hat{\Delta}_{s'_1} \cap \hat{\Delta}_{s'_2}, \quad (\text{A.8})$$

$$s'_1(\hat{\Delta}_2 \setminus \hat{\Delta}_0) \cap \hat{\Delta}_0 = \emptyset \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_1^4(H_1 - X_1) = \sigma_2^5(H_2 - X_2) = \sigma_3^6(H_3 - X_3) = 1,$$

$$\varpi(H_1) - s_1 \varpi(H_2) \leq M_1, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_1, \quad (\text{A.10})$$

$$\varpi(H_2) - s'_1 \varpi(H_1) \leq M_2, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_2, \quad (\text{A.11})$$

$$\varpi(H_1) - s'_2 \varpi(H_3) \leq M_3, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_1, \quad (\text{A.12})$$

$$\varpi(H_3) - s_2 \varpi(H_1) \leq M_4, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_3. \quad (\text{A.13})$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante des éléments $H_1, H_2, H_3, X_1, X_2, X_3, M_1, M_2, M_3, M_4$ telle que

$$\|H_1\|, \|H_2\|, \|H_3\| \leq C(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \|X_1\| + \|X_2\| + \|X_3\|). \quad (\text{A.14})$$

Démonstration. Dans la preuve on ne prendra pas garde de constantes qui apparaissent. Il est clair que pour obtenir une constante C uniforme il suffit de prendre le maximum de toutes les constantes en question.

Remarquons que si l'on démontre

$$\alpha(H_1) \leq C(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \|X_1\| + \|X_2\| + \|X_3\|) \quad (\text{A.15})$$

pour tout $\alpha \in \Delta_1^4$ on a aussi l'inégalité (A.14) pour H_1 . En effet, par définition de σ_1^4 (voir (1.18) dans le paragraphe 1.8) on a $\alpha(H_1) \geq \alpha(X_1)$ pour tout $\alpha \in \Delta_1^4$. Puisque Δ_1^4 est une base de \mathfrak{a}_1^4 on a que la projection de H à \mathfrak{a}_1^4 vérifie (A.14) et on obtient le résultat pour H_1 en invoquant le lemme 1.7 ii).

Supposons maintenant qu'on a démontré l'inégalité dans la proposition pour H_1 seulement. On veut en déduire la même inégalité pour H_2 . En remarquant qu'on a l'inégalité des fonctions caractéristiques $\tau_P^Q \geq \sigma_P^Q$, on applique le corollaire A.3 avec $P = P_1$, $Q = P_4$, $P' = P_2$ et $Q' = P_5$ avec les inégalités (A.10) et (A.11) ci-dessus et on obtient une constante $C' > 0$ telle que

$$\alpha(H_2) \leq C'(M_1 + M_2 + \|X_1\| + \|X_2\| + \|H_1\|)$$

pour tout $\alpha \in \Delta_2^5$. D'après ce qu'on a dit ci-dessus cela implique l'inégalité (A.14) pour H_2 si H_1 la vérifie. De même façon, en passant directement par le lemme A.2, on montre que si H_1 vérifie (A.14) alors H_3 la vérifie aussi.

Fixons un $\gamma \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1$. Il suffit donc de montrer que $\gamma(H_1)$ vérifie l'inégalité (A.15). Soit $s_0 \in \Omega^{Q_1}$ tel que $s_0^{-1}P_2 \in \mathcal{F}(P_0)$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap \hat{\Delta}_6, \quad \mathcal{S}_2 = (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap (\hat{\Delta}_0 \setminus \hat{\Delta}_3), \quad \mathcal{S}_3 = (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap \hat{\Delta}_5, \quad \mathcal{S}_4 = (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap (\hat{\Delta}_0 \setminus \hat{\Delta}_{s_0^{-1}P_2}), \\ \mathcal{S}_5 &= (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap (\hat{\Delta}_3 \setminus \hat{\Delta}_6) \cap (\hat{\Delta}_{Q_1} \setminus \hat{\Delta}_5), \quad \mathcal{S}_6 = (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap (\hat{\Delta}_3 \setminus \hat{\Delta}_6) \cap (\hat{\Delta}_{s_0^{-1}P_2} \setminus \hat{\Delta}_{Q_1}). \end{aligned}$$

On a donc $(\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{S}_i$. En utilisant le corollaire A.3 avec $P = P_1$, $Q = P_4$, $P' = P_2$ et $Q' = P_5$ avec les inégalités (A.10) et (A.11) ainsi que le lemme A.2 avec $P = P_1$, $Q = P_4$, $P' = P_3$ et $Q' = P_6$ avec les inégalités (A.12) et (A.13) on trouve une constante $C' > 0$ telle que

$$\gamma(H_1) \leq \gamma(s_0^{-1}H_2) + C'(M_1 + M_2 + \|X_1\| + \|X_2\|), \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma(H_1) \leq \gamma(H_3) + C'(M_3 + M_4 + \|X_1\| + \|X_3\|). \quad (\text{A.17})$$

Soit $\varpi \in \hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4$ le poids correspondant à $\gamma \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1$ qu'on a choisi. Alors

- Si $\varpi \in \mathcal{S}_1$, on a $\gamma \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^6$ et donc $\gamma(H_3) \leq \gamma(X_3) \leq C''\|X_3\|$ par définition de σ_3^6 et le résultat suit de l'inégalité (A.17).
- Si $\varpi \in \mathcal{S}_2$ on a $\gamma \in \Delta_0^3$ et donc $\gamma(H_3) = 0$ et le résultat suit aussi de (A.17).
- Si $\varpi \in \mathcal{S}_3$ on a $\gamma(s_0^{-1}H_2) = s_0\gamma(H_2)$ et $s_0\gamma \in \Delta_{s_0P_0} \setminus \Delta_{s_0P_0}^{s_0P_5}$. Mais $s_0P_5 = P_5$ car $s_0 \in \Omega^{Q_1} \subseteq \Omega^{P_5}$. Le résultat suit donc de l'inégalité (A.16) et de la définition de la fonction σ_2^5 .
- Si $\varpi \in \mathcal{S}_4$ on a $s_0\gamma \in \Delta_{s_0P_0}^{P_2}$ donc $\gamma(s_0^{-1}H_2) = 0$ et le résultat suit de (A.16) de nouveau.
- Supposons que $\varpi \in \mathcal{S}_5$. On a alors $\gamma \in (\Delta_0^4 \cap \Delta_0^5 \cap \Delta_0^6) \setminus (\Delta_0^1 \cup \Delta_0^{Q_1} \cup \Delta_0^3)$. En plus, $\varpi \notin \hat{\Delta}_4 \cup \hat{\Delta}_5 \cup \hat{\Delta}_6 = \hat{\Delta}_{Q_2}$ et $\varpi \in \hat{\Delta}_{Q_1}$. En vertu de la condition (A.8) on a donc que soit $\varpi \notin \hat{\Delta}_{s'_1}$ soit $\varpi \notin \hat{\Delta}_{s'_2}$.
 - Supposons $\varpi \notin \hat{\Delta}_{s'_2}$. Ajoutons les inégalités (A.12) et (A.13) avec $\varpi = \varpi$, ce qu'on peut faire car $\varpi \in (\hat{\Delta}_1 \setminus \hat{\Delta}_4) \cap (\hat{\Delta}_3 \setminus \hat{\Delta}_6) \subseteq \hat{\Delta}_1 \cap \hat{\Delta}_3$. On obtient donc :
$$\varpi^{s_2}(H_1) + \varpi^{s'_2}(H_3) \leq M_3 + M_4.$$

D'après les propriétés **P1**) et **P2**) ci-dessus, on a $\varpi^{s_2}(H_1) = \sum_{\alpha \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1} a_\alpha \alpha(H_1)$ et $\varpi^{s'_2}(H_3) = \sum_{\alpha \in \Delta_0^6 \setminus \Delta_0^3} a'_\alpha \alpha(H_3)$ où $a_\alpha, a'_\alpha \geq 0$ et $a'_\gamma > 0$. En utilisant la définition des fonctions σ_1^4 et σ_3^6 , pour tout $\alpha \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1$ on a $\alpha(H_1) \geq \alpha(X_1)$ et pour tout $\alpha \in \Delta_0^6 \setminus \Delta_0^3$ on a $\alpha(H_3) \geq \alpha(X_3)$. On trouve donc une constante $C' > 0$ telle que $a'_\gamma \gamma(H_3) - \varpi^{s'_2}(H_3) \leq C' \|X_3\|$ et $-\varpi^{s_2}(H_1) \leq C' \|X_1\|$. D'où

$$\gamma(H_3) \leq \frac{1}{a'_\gamma} (C' \|X_1\| + C' \|X_3\| + M_3 + M_4).$$

En utilisant alors l'inégalité (A.17) on obtient le résultat voulu.

- Supposons $\varpi \notin \hat{\Delta}_{s'_1}$. On a alors $\varpi \in \mathcal{S}_5 \subseteq \hat{\Delta}_{Q_1}$ et $s_0 \in \Omega^{Q_1}$ donc $s_0 \varpi = \varpi$. Donc $\varpi \in \hat{\Delta}_1 \cap \hat{\Delta}_2$. On ajoute alors les inégalités (A.10) et (A.11) avec $\varpi = \varpi$ ce qui donne

$$\varpi^{s'_1}(H_1) + \varpi^{s_1}(H_2) \leq M_1 + M_2.$$

Puisque $s_1 \in \Omega^{Q_1} \subseteq \Omega^{P_5}$, on a $\varpi^{s_1}(H_2) = \sum_{\alpha \in \Delta_2^5} a_\alpha \alpha(H_2)$ où $a_\alpha \geq 0$ en vertu de la propriété **P2**) ci-dessus. En utilisant donc la définition de la fonction σ_2^5 on trouve une constante $C' > 0$ telle que $-\varpi^{s_1}(H_2) \leq C' \|X_2\|$. Donc, puisque $\varpi^{s'_1} \neq 0$, on a $\varpi^{s'_1}(H_1) = \sum_{\alpha \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1} a_\alpha \alpha(H_1)$ où $a_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^4 \setminus \Delta_0^1$ et $a_\gamma > 0$. Par définition de la fonction σ_1^4 on obtient alors :

$$\gamma(H_1) \leq c'' (C'' \|X_1\| + C' \|X_2\| + M_1 + M_2).$$

pour certaines constantes $c'', C'' > 0$.

- Supposons que $\varpi \in \mathcal{S}_6$. On a $s_0 \varpi \in \hat{\Delta}_2$. Ajoutons donc l'inégalité (A.10) avec $\varpi = \varpi$ et (A.11) avec $\varpi = s_0 \varpi$. On trouve :

$$\varpi^{s'_1 s_0}(H_1) + (s_0 \varpi)^{s_1 s_0^{-1}}(H_2) \leq M_1 + M_2.$$

On a $\hat{\Delta}_{Q_1} = \hat{\Delta}_1 \cap \hat{\Delta}_3 \cap \hat{\Delta}_{s_0^{-1} P_2} \cap \hat{\Delta}_{s_0}$. Puisque $\varpi \notin \hat{\Delta}_{Q_1}$ et $\varpi \in \hat{\Delta}_1 \cap \hat{\Delta}_3 \cap \hat{\Delta}_{s_0^{-1} P_2}$, on a bien $s_0 \varpi \neq \varpi$. Puisque différents éléments de $\hat{\Delta}_0$ ne sont pas conjugués sous Ω^G on obtient $s_0 \varpi \in \hat{\Delta}_2 \setminus \hat{\Delta}_0$. En vertu de la condition (A.9) on a alors $\varpi^{s'_1 s_0} \neq 0$ et on conclut en raisonnant de même façon que dans le deuxième sous-point du point précédent.

□

Corollaire A.5. Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{F}(P_0)$, $M_1, M_2 \geq 0$, $H_1, X_1 \in \mathfrak{a}_1^G$, $H_2, X_2 \in \mathfrak{a}_2^G$, $s, s' \in \Omega^{P_3 \cap P_4}$. Soit Q_1 le plus petit sous-groupe parabolique contenant $P_1 \cup P_2$. Supposons qu'on a $Q_1 \subseteq P_3 \cap P_4 =: Q_2$ et que

$$\hat{\Delta}_{Q_2} = \hat{\Delta}_{Q_1} \cap \hat{\Delta}_s \cap \hat{\Delta}_{s'} \tag{A.18}$$

$$\sigma_1^3(H_1 - X_1) = \sigma_2^4(H_2 - X_2) = 1,$$

$$\varpi(H_1) - s\varpi(H_2) \leq M_1, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_1, \tag{A.19}$$

$$\varpi(H_2) - s'\varpi(H_1) \leq M_2, \quad \forall \varpi \in \hat{\Delta}_2, \tag{A.20}$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante des éléments $H_1, H_2, X_1, X_2, M_1, M_2$ telle que

$$\|H_1\|, \|H_2\| \leq C(M_1 + M_2 \|X_1\| + \|X_2\|). \tag{A.21}$$

Démonstration. Il s'agit de se ramener au lemme A.4 ci-dessus. On l'utilise alors avec les données suivantes. Pour les groupes P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 du lemme on prend P_1, P_2, P_2, P_3, P_4 et P_4 dans cet ordre. Pour les éléments H_1, H_2 et H_3 on prend H_1, H_2 et H_2 respectivement. Pour X_1, X_2 et X_3 on prend X_1, X_2 et X_2 respectivement. Pour les éléments du groupe de Weyl on prend $s_1 = s, s'_1 = s', s_2 = s'$ et $s'_2 = s$. Il est clair que la condition (A.18) ci-dessus donne la condition (A.8) du lemme. Les inégalités du lemme A.4 correspondent aux inégalités suivantes :

$$(A.10) \leftrightarrow (A.19), \quad (A.11) \leftrightarrow (A.20), \quad (A.12) \leftrightarrow (A.19), \quad (A.13) \leftrightarrow (A.20).$$

Les inégalités déterminent les constantes M_1, M_2, M_3 et M_4 . Finalement, la condition (A.9) est trivialement vérifiée car $P_2 \in \mathcal{F}(P_0)$. \square

Références

- [Art78] James ARTHUR : A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. *Duke Mathematical Journal*, 45(4):911–952, 1978.
- [Art80] James ARTHUR : A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator. *Compositio Math.*, 40(1):87–121, 1980.
- [Art81] James ARTHUR : The trace formula in invariant form. *Ann. of Math. (2)*, 114(1):1–74, 1981.
- [Fli91] Yuval Z. FLICKER : On distinguished representations. *J. Reine Angew. Math.*, 418:139–172, 1991.
- [GGP12] Wee Teck GAN, Benedict H. GROSS et Dipendra PRASAD : Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups. *Astérisque*, (346):1–109, 2012. Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.
- [God64] Roger GODEMENT : Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques. *In Séminaire Bourbaki, 1962/63. Fasc. 3, No. 257*. 1964.
- [Har14] R. Neal HARRIS : The refined Gross-Prasad conjecture for unitary groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2):303–389, 2014.
- [II10] Atsushi ICHINO et Tamutsu IKEDA : On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 19(5):1378–1425, 2010.
- [IYa] Atsuchi ICHINO et Shunsuke YAMANA : Periods of automorphic form : the case of $(\mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$. *Compositio Math.* À paraître.
- [IYb] Atsuchi ICHINO et Shunsuke YAMANA : Periods of automorphic form : the case of $(\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n)$. Prépublication.
- [JLR99] Hervé JACQUET, Erez LAPID et Jonathan ROGAWSKI : Periods of automorphic forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1):173–240, 1999.
- [JPSS83] H. JACQUET, I. I. PIATETSKII-SHAPIRO et J. A. SHALIKA : Rankin-Selberg convolutions. *Amer. J. Math.*, 105(2):367–464, 1983.
- [JR11] Hervé JACQUET et Stephen RALLIS : On the Gross-Prasad conjecture for unitary groups. *In On certain L-functions*, volume 13 de *Clay Math. Proc.*, pages 205–265. Amer. Math. Soc., 2011.

- [LW09] Jean-Pierre LABESSE et Jean-Loup WALDSPURGER : *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*. Paris, 2009.
- [Mih15] Andreas MIHATSCH : On the arithmetic fundamental lemma through lie algebras. *arXiv :1502.02855v1*, 2015.
- [MW95] C. MØGLIN et J.-L. WALDSPURGER : *Spectral decomposition and Eisenstein series*, volume 113 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Une paraphrase de l'Écriture [A paraphrase of Scripture].
- [RTZ13] Michael RAPOPORT, Ulrich TERSTIEGE et Wei ZHANG : On the arithmetic fundamental lemma in the minuscule case. *Compos. Math.*, 149(10):1631–1666, 2013.
- [Yun11] Zhiwei YUN : The Fundamental Lemma of Jacquet-Rallis in positive characteristics. *Duke Mathematical Journal*, 156(2):167–228, 2011.
- [Zha12] Wei ZHANG : On arithmetic fundamental lemmas. *Invent. Math.*, 188(1):197–252, 2012.
- [Zha14a] Wei ZHANG : Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L -function. *J. Amer. Math. Soc.*, 27:541–612, 2014.
- [Zha14b] Wei ZHANG : Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups. *Ann. of Math. (2)*, 180(3):971–1049, 2014.
- [ZRS15] Wei ZHANG, Michael RAPOPORT et Brian SMITHLING : On the arithmetic transfer conjecture for exotic smooth formal moduli spaces. *Prépublication arXiv :1503.06520v2*, 2015.
- [Zyd15a] Michał ZYDOR : La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires. 2015. *arXiv :1310.1650v2*.
- [Zyd15b] Michał ZYDOR : La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes unitaires. 2015. *arXiv :1306.1061v2*.